

Geometría y Mecánica en Superficies de Revolución.

Por César Rodrigo Fernández

La formulación y resolución de problemas geométricos en superficies es históricamente una de las principales fuentes en el desarrollo de la geometría diferencial. Aún hoy día la geometría de las superficies sigue aportando información esencial para la resolución de los más diversos problemas geométricos. Pese a la dificultad de muchos problemas en esta disciplina, la experiencia muestra cómo, por lo general, si se admite la presencia de una simetría no trivial en la superficie, la resolución de cuestiones que admitan dicha simetría puede ser llevada a cabo con ayuda de esta en una forma mucho más simple.

Como puede comprobarse, si una superficie S admite una isometría infinitesimal no nula en un punto, entonces existe todo un entorno de dicho punto en la superficie S isométrico a un abierto de una superficie de revolución. Partiendo de esta idea, nos planteamos el siguiente modelo intuitivo de superficie que admite un grupo de simetrías: Las superficies de revolución en el espacio.

Tomando como modelo de superficie con simetrías no triviales las superficies de revolución, la presente charla pretende discutir cómo ciertas cuestiones intrínsecas de geometría pueden ser resueltas con técnicas propias de cursos introductorios de geometría diferencial. Además estas ideas nos permitirán resolver intrínsecamente problemas de física no triviales sobre dichas superficies.

Inicialmente, se realizará un estudio de los elementos de geometría intrínseca presentes en una superficie de revolución. Como resultado central, se dará un teorema de clasificación de superficies de revolución (como superficies inmersas en $\mathbb{R}^3$) de curvatura constante, mostrando cómo para cada valor real existe exactamente una familia uniparamétrica de superficies de revolución diferentes con esa curvatura.

A continuación, se realizará un estudio de un problema de mecánica (el movimiento de una partícula en presencia de un potencial de fuerzas en una superficie de revolución), íntimamente relacionado con el estudio de las geodésicas. La existencia de la simetría permite calcular las trayectorias explícitamente mediante cuadraturas, al tiempo que proporciona una interpretación del clásico teorema de Clairaut en términos de una ley de conservación de energía y momento.

1.- Algunos aspectos geométricos de las superficies de revolución

Consideremos una curva parametrizada regular $(\rho(\theta), h(\theta))$ (la “generatriz”) en el plano XZ del espacio $\mathbb{R}^3$, que no corte al eje Z (esto es, $(\rho'(\theta), h'(\theta)) \neq (0, 0)$ y $\rho(\theta) \neq 0$).

Si a cada punto $(\rho(\theta), h(\theta))$ se le aplica un giro de ángulo φ alrededor del eje Z , obtenemos los puntos $(\rho(\theta) \cos \varphi, \rho(\theta) \sin \varphi, h(\theta))$ de $\mathbb{R}^3$. Este conjunto queda parametrizado por:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \theta) & \mapsto & (\rho(\theta) \cos \varphi, \rho(\theta) \sin \varphi, h(\theta)) \end{array}$$

que tiene como imagen una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ donde (φ, θ) son sistema de coordenadas locales.

La primera forma fundamental g de esta superficie expresada en dichas coordenadas es:

$$g = \rho^2(\theta) d\varphi \otimes d\varphi + (\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2) d\theta \otimes d\theta$$

Pueden entonces calcularse los símbolos de Christoffel asociados a dicha métrica en coordenadas (φ, θ) :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi} &= 0, & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} &= \frac{-\rho(\theta)\rho'(\theta)}{\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2} \\ \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} &= \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)}, & \Gamma_{\varphi\theta}^{\theta} &= \Gamma_{\theta\varphi}^{\theta} = 0 \\ \Gamma_{\theta\theta}^{\varphi} &= 0, & \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} &= \frac{\rho'(\theta)\rho''(\theta) + h'(\theta)h''(\theta)}{\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2} \end{aligned}$$

El tensor de curvatura $R = \sum R_{ij}{}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$ está definido por:

$$R_{ij}{}^l{}_k = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \sum_s \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l$$

De forma que

$$R_{\varphi\theta\theta}{}^{\varphi} = \frac{-(\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2)^{1/2}}{\rho(\theta)} \left(\frac{\rho'(\theta)}{(\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2)^{1/2}} \right)'$$

La curvatura de Gauss de S , por tanto, es:

$$R = \frac{R_{\varphi\theta\theta\varphi}}{\det g} = \frac{-1}{\rho(\theta)(\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2)^{1/2}} \left(\frac{\rho'(\theta)}{(\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2)^{1/2}} \right)'$$

Sustituyendo el parámetro θ por el parámetro de longitud de arco s de la generatriz, puesto que $\frac{d}{ds} = \frac{1}{(\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2)^{1/2}} \frac{d}{d\theta}$, se obtiene:

$$R = \frac{-1}{\rho} \frac{d^2}{ds^2}(\rho)$$

Teorema. *Sea σ una curva parametrizada regular contenida en un plano de $\mathbb{R}^3$ y sea r una recta en ese plano que no corte a σ . Entonces la superficie obtenida al hacer girar la curva σ alrededor del eje r es una superficie regular y su curvatura es:*

$$R = \frac{-1}{\rho} \frac{d^2}{ds^2}(\rho)$$

De aquí podemos extraer las siguientes consecuencias:

- La curvatura escalar es positiva en aquellos puntos donde $\rho(s)$ es una función cóncava, negativa allí donde $\rho(s)$ es una función convexa, y nula en el resto de los puntos.

E integrando la correspondiente ecuación diferencial, obtenemos las superficies de revolución con curvatura constante:

- La curvatura se anula idénticamente sólo para $\rho(s) = a \cdot s + b$, $h(s) = \sqrt{1 - a^2} \cdot s + c$, esto es, cuando la generatriz es una recta. Las únicas superficies de revolución de curvatura nula son por tanto cilindros, conos y planos.
- Las superficies de revolución de curvatura escalar constante positiva $R = (1/r)^2$ están definidas por curvas $(\rho(s), h(s))$ con $\rho(s) = \lambda \sin(\frac{s-s_0}{r})$ y $\frac{d}{ds}h(s) = \sqrt{1 - \rho'(s)^2}$. En el caso particular de $\lambda = r$, estas son las ecuaciones de la esfera de radio r .

$$\rho(s) = r \sin\left(\frac{s-s_0}{r}\right), \quad h(s) = r \cos\left(\frac{s-s_0}{r}\right)$$

- Las superficies de revolución de curvatura escalar constante negativa $R = -(1/r)^2$ están definidas por curvas $(\rho(s), h(s))$ con $\rho(s) = \alpha \exp(\frac{1}{r}s) + \beta \exp(-\frac{1}{r}s)$ y $\frac{d}{ds}h(s) = \sqrt{1 - \rho'(s)^2}$. En el caso particular $\beta = 0$, la superficie correspondiente es:

$$\rho(s) = r \exp \frac{1}{r}(s - s_0)$$

$$h(s) = \int \sqrt{1 - \exp \frac{2}{r}(s - s_0)} ds$$

que son las ecuaciones de la tractriz. La superficie resultante es conocida como pseudoesfera.

Estos resultados, permiten formular el siguiente:

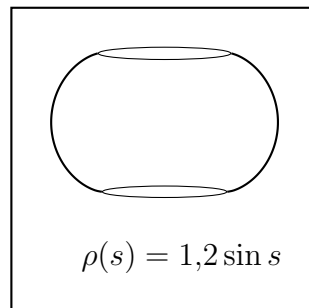
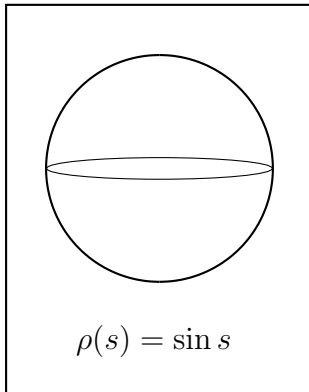
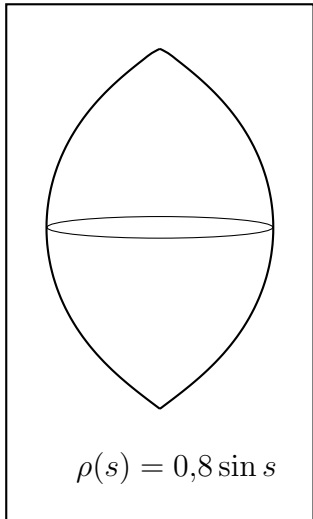
Teorema. *Toda superficie de revolución conexas de curvatura constante en el espacio es, salvo movimientos euclídeos y reparametrizaciones, una corona de alguna de las siguientes superficies:*

Curvatura	Parámetro	Radio(s)	Intervalo de definición
$R = \frac{1}{r^2}$	$\lambda \in (0, 1)$	$\rho(s) = \lambda r \sin(s/r)$	$s/r \in (0, \pi)$
$R = \frac{1}{r^2}$		$\rho(s) = r \sin(s/r)$	$s/r \in (0, \pi)$
$R = \frac{1}{r^2}$	$\lambda \in (1, \infty)$	$\rho(s) = \lambda r \sin(s/r)$	$s/r \in \pi/2 + [-\arcsin(1/\lambda), \arcsin(1/\lambda)]$
$R = 0$	$\lambda \in (0, 1)$	$\rho(s) = \lambda s$	$s \in \mathbb{R}^+$
$R = 0$		$\rho(s) = s$	$s \in \mathbb{R}^+$
$R = 0$	$\lambda \in \mathbb{R}^+$	$\rho(s) = \lambda$	$s \in \mathbb{R}$
$R = \frac{-1}{r^2}$	$\lambda \in (0, 1)$	$\rho(s) = \lambda r \sinh(s/r)$	$s/r \in (0, \operatorname{arccosh}(1/\lambda))$
$R = \frac{-1}{r^2}$		$\rho(s) = r e^{s/r}$	$s \in (-\infty, 0)$
$R = \frac{-1}{r^2}$	$\lambda \in \mathbb{R}^+$	$\rho(s) = \lambda r \cosh(s/r)$	$s/r \in [-\operatorname{arcsinh}(1/\lambda), \operatorname{arcsinh}(1/\lambda)]$

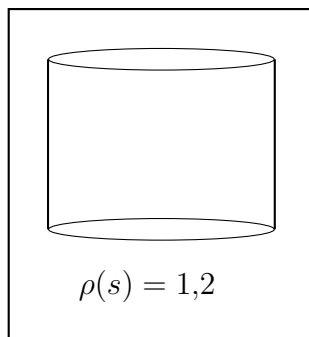
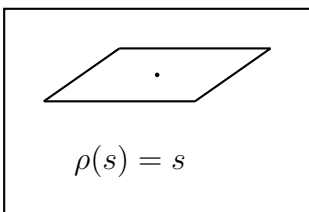
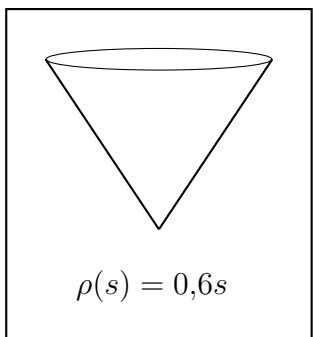
donde la función $h(s)$ está dada por $h(s) = \int \sqrt{1 - \rho'(s)^2} ds$.

De todas estas superficies las únicas que son completas son el cilindro, la esfera y el plano (estos últimos añadiendo los puntos situados en el eje de giro).

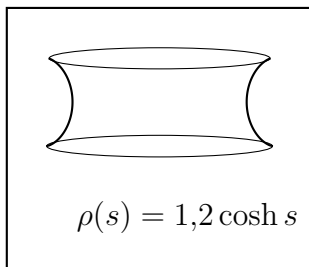
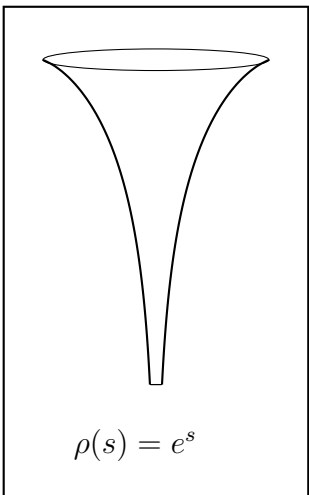
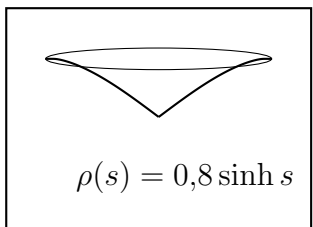
Curvatura positiva +1:



Curvatura nula:



Curvatura negativa -1:



2.-Mecánica en Superficies de Revolución

2.1- Principio de acción mínima

Las ecuaciones de movimiento de una partícula que se mueve en una superficie de revolución en presencia de un potencial pueden obtenerse mediante un principio variacional. Esta sección no se plantea como objetivo la formulación de una teoría variacional, sino sólo servir como motivación de las ecuaciones de movimiento.

La trayectoria de una partícula en la superficie S viene definida por una curva parametrizada $\sigma: [a, b] \rightarrow S$, su energía cinética en un instante t como $\frac{1}{2}m\|D_{\sigma(t)}\|^2$, siendo $m \neq 0$ la masa de la partícula, $D_{\sigma(t)} = \sigma_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_t$ el vector velocidad de la misma dicho instante t , y $\|D_{\sigma(t)}\|^2$ el módulo al cuadrado de dicha velocidad.

En la superficie podemos considerar una función que describa la energía potencial que tiene la partícula en cada punto, $V \in \mathcal{C}^\infty(S)$ debida a las fuerzas que actúan sobre esta. Se define la acción a lo largo de σ a la integral:

$$\mathbb{L}(\sigma) = \int_a^b \left(\frac{1}{2}m D_{\sigma(t)} \cdot D_{\sigma(t)} - V(\sigma(t)) \right) dt$$

El principio variacional asociado (principio de acción mínima o de Hamilton), indica que una partícula libre, en presencia de un potencial $V \in \mathcal{C}^\infty(S)$ se moverá a lo largo de una trayectoria que es valor crítico para la funcional de acción respecto de cualquier variación de σ con extremos $\sigma(a) = p$, $\sigma(b) = q$ fijos:

$$\delta_{\{\sigma_\lambda\}} \mathbb{L}(\sigma) = 0$$

donde $\delta_{\{\sigma_\lambda\}} \mathbb{L}$ se define sobre familias uniparamétricas de curvas $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda \in (-\epsilon, \epsilon)}$ con extremos fijos $\sigma_\lambda(a) = p$, $\sigma_\lambda(b) = q$ (variaciones de la curva $\sigma = \sigma_0$) en la forma:

$$\delta_{\{\sigma_\lambda\}} \mathbb{L}(\sigma) = \left(\frac{d}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} (\mathbb{L}(\sigma_\lambda))$$

Este principio de acción mínima lleva a las conocidas ecuaciones de Euler-Lagrange, que deben satisfacer las trayectorias:

Teorema. *Una curva $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow S$ es valor crítico para la funcional de acción $\mathbb{L}$ si y sólo si su vector tangente $D_{\sigma(t)} = \sigma_* \frac{\partial}{\partial t}$ cumple:*

$$m \nabla_D D = - \text{grad } V$$

a lo largo de σ , siendo $\text{grad } V$ el gradiente de la función V respecto de la primera forma fundamental y ∇ la conexión de Levi-Civita de la superficie.

Observación: Esta fórmula puede interpretarse bajo la perspectiva de las leyes de Newton: La masa por la aceleración coinciden con el campo de fuerzas ($-\text{grad } V$) al que se ve sometido la partícula.

Observación: Podemos hacer notar que en el caso $V = 0$, la minimización de la acción $\frac{1}{2}mD \cdot D$ conduce a las mismas ecuaciones $\nabla_D D = 0$ que la minimización de la longitud de arco $\sqrt{D \cdot D}$. La partícula libre (esto es, en ausencia de fuerzas), por tanto, se mueve a lo largo de las geodésicas de la superficie.

2.2- Leyes de conservación y Teorema de Clairaut

En un sistema de coordenadas cualquiera, si la curva se expresa como $\sigma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, las ecuaciones diferenciales $m\nabla_D D = -\text{grad } V$ pueden expresarse como:

$$m \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial t} \right) = - \sum_l g^{il} \frac{\partial V}{\partial x^l}$$

En lo sucesivo consideraremos potenciales con simetría de giro, es decir, potenciales $V = V(\theta)$ independientes de la variable φ . En particular, aquellos con significado físico como $V = 0$ (partícula libre) y $V = m \cdot g \cdot z|_S = m \cdot g \cdot h(\theta)$ (partícula de masa m en un campo gravitatorio constante de intensidad g en la dirección del eje Z).

En nuestro caso, usando los correspondiente símbolos de Christoffel, concluimos que una curva $\sigma(t) = (\varphi(t), \theta(t))$ es una trayectoria de la partícula si y sólo si:

$$0 = \ddot{\varphi} + \frac{2\rho'(\theta)}{\rho(\theta)} \dot{\varphi} \dot{\theta}$$

$$\frac{-V'(\theta)}{\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2} = m \left(\ddot{\theta} - \frac{\rho(\theta)\rho'(\theta)}{\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2} \dot{\varphi} \dot{\varphi} + \frac{\rho'(\theta)\rho''(\theta) + h'(\theta)h''(\theta)}{\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2} \dot{\theta} \dot{\theta} \right)$$

Se obtiene con ello un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con dos incógnitas: las funciones $\varphi(t)$ y $\theta(t)$. Veamos cómo podemos expresarlas en una forma más simple.

Si proyectamos las componentes de la ecuación $m\nabla_D D + \text{grad } V = 0$ en las direcciones D y $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, obtendremos:

$$0 = (m\nabla_D D + \text{grad } V) \cdot D = m\nabla_D D \cdot D + D(V) = D \left(\frac{1}{2}mD \cdot D + V \right)$$

$$0 = (m\nabla_D D + \text{grad } V) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} = m\nabla_D D \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi}(V) = m\nabla_D D \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

La primera de las igualdades permite afirmar que, a lo largo de la curva solución (cuyo vector tangente es el campo D), la función

$$E = \frac{1}{2}mD \cdot D + V$$

permanece constante, dando lugar al conocido teorema de conservación de la energía:

Proposición (Conservación de la energía). *A lo largo de las trayectorias de la partícula, la suma de las energías cinética y potencial se mantiene constante.*

Para interpretar la segunda de las igualdades, teniendo en cuenta que $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ es isometría infinitesimal, para cualquier campo D se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(L_{\frac{\partial}{\partial\varphi}} g \right) (D, D) = \frac{\partial}{\partial\varphi} (D \cdot D) - 2 \left[\frac{\partial}{\partial\varphi}, D \right] \cdot D = \\ &= 2 \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi}} D - \left[\frac{\partial}{\partial\varphi}, D \right] \right) \cdot D = 2 \left(\nabla_D \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \cdot D \end{aligned}$$

Así pues:

$$0 = m \nabla_D D \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} = mD \left(D \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) - mD \cdot \nabla_D \frac{\partial}{\partial\varphi} = D \left(mD \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)$$

Tenemos por ello una segunda constante de movimiento:

$$\mu_\varphi = mD \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} = m\dot{\varphi}\rho(\theta)^2$$

Proposición (Conservación del momento lineal en la dirección $\frac{\partial}{\partial\varphi}$). *A lo largo de las trayectorias de la partícula, el producto escalar de la cantidad de movimiento mD por el campo $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ se mantiene constante.*

Recalquemos que ambas leyes de conservación en conjunto son equivalentes al sistema de ecuaciones original, siempre que $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ y D sean dos campos linealmente independientes (esto es, para aquellas trayectorias no tangentes a los paralelos).

Caso geodésico: Podemos observar que en el caso $V = 0$ (ecuaciones de las geodésicas), se tiene $D \cdot D = \text{cte}$ y $mD \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} = \text{cte}'$. La primera de ellas indica que la trayectoria debe estar siempre parametrizada por longitud de arco constante, mientras que si se interpreta la segunda en términos del ángulo α que forma la trayectoria con los paralelos, estos resultados son equivalentes al teorema:

Teorema (Teorema de Clairaut). Si $\sigma(t)$ es una curva parametrizada regular en S , y $\alpha(t)$ denota el ángulo que forma su vector tangente $D_{\sigma(t)}$ con los paralelos,

- en todo abierto donde $\alpha(t) \neq 0$, la curva σ es una geodésica si y sólo si está parametrizada por longitud de arco y $\rho \cdot \cos \alpha$ es constante a lo largo de ella, y
- en todo abierto donde $\alpha(t) = 0$ (por tanto paralelos $\theta = \theta_0$), la curva σ es una geodésica si y sólo si está parametrizada por longitud de arco y $\rho'(\theta_0) = 0$ (en particular, son geodésicas los paralelos correspondientes a radios máximos y mínimos)

Demostración. La condición para que una curva parametrizada regular sea geodésica es que $\nabla_D D = 0$ y que esté parametrizada por longitud de arco.

Puesto que $\|\frac{\partial}{\partial \varphi}\| = \rho$, y ya que la ecuación $\nabla_D D = 0$ es equivalente a las leyes de conservación $\|D\| = \text{cte}$ y $mD \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} = m\|D\| \cdot \|\frac{\partial}{\partial \varphi}\| \cdot \cos \alpha = \text{cte}'$ anteriores, podemos concluir la primera parte del teorema. En los puntos donde $\dot{\theta} = 0$, por otra parte, D y $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ son linealmente dependientes y dichas ecuaciones no son suficientes. Las ecuaciones $\nabla_D D = 0$ en este caso pasan a ser las indicadas inicialmente:

$$0 = \ddot{\varphi}, \quad 0 = -m \frac{\rho(\theta)\rho'(\theta)}{\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2} \dot{\varphi} \dot{\varphi}$$

que se verifican si y sólo si $\varphi(t)$ es afín y $\rho'(\theta) = 0$ a lo largo de la curva. $\square$

Podemos interpretar así el teorema de Clairaut como un teorema de conservación de la energía y del momento lineal en una partícula libre.

2.3- Integrales primeras y soluciones

El sistema de ecuaciones que determinan el movimiento de la partícula en presencia de un potencial $V(\theta) = mgh(\theta)$ ($g > 0$) es un sistema de ecuaciones de segundo orden, en general de difícil solución.

Tomando las ecuaciones de movimiento originales, resulta sencillo ver que las trayectorias solución, en aquellos abiertos donde $\dot{\theta} = 0$, son movimientos a lo largo de un paralelo $\theta = \theta_0$ con velocidad constante $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{gh'(\theta_0)}{\rho(\theta_0)\rho'(\theta_0)}}$, siempre que $\rho'(\theta_0) \neq 0$, $h'(\theta_0)/\rho'(\theta_0) \geq 0$. No hay ninguna otra solución posible a lo largo de paralelos.

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \sqrt{\frac{gh'(\theta_0)}{\rho(\theta_0)\rho'(\theta_0)}} t + \varphi_0$$

Por otra parte, para aquellos valores en los que $\dot{\theta} \neq 0$, tendremos que D y $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ son linealmente independientes y en tal caso, las ecuaciones pueden integrarse como acabamos de ver obteniéndose las leyes de conservación:

$$E = \frac{1}{2}m \left(\rho(\theta)^2 \dot{\varphi}^2 + (\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2) \dot{\theta}^2 \right) + mgh(\theta)$$

$$\mu_\varphi = m \dot{\varphi} \rho(\theta)^2$$

Observación: A partir de las expresiones anteriores puede observarse que las ecuaciones de movimiento de una partícula de masa m con valores de energía y momento dados $E = m \cdot e$ y $\mu_\varphi = m \cdot \mu$ son las mismas que las de una partícula de masa 1 con valores de energía y momento $E = e$, $\mu_\varphi = \mu$. El movimiento de las partículas es, por tanto, independiente de sus masas. Dos partículas de masas distintas en las mismas condiciones iniciales de posición y velocidad, describen la misma trayectoria.

Si se conoce la función $\theta(t)$, la segunda ecuación, mediante una simple integral, permitiría recuperar $\varphi(t)$ mediante:

$$\dot{\varphi} = \frac{\mu_\varphi}{m \rho(\theta)^2}$$

Para obtener $\theta(t)$ podemos sustituir en la primera ecuación, obteniendo:

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{2m(E - mgh(\theta))\rho(\theta)^2 - \mu_\varphi^2}}{m \rho(\theta) \sqrt{\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2}}$$

El problema de cálculo de soluciones se reduce con ello a resolver esta ecuación diferencial de primer orden para $\theta(t)$.

La resolución de esta ecuación diferencial no tiene por qué ser trivial. Sin embargo, como veremos, podemos apoyarnos en la independencia de φ de ambas expresiones para integrar el sistema.

Calculemos primero la trayectoria descrita por la partícula en forma implícita. Si deseamos expresar la curva por una ecuación implícita $\varphi = \varphi(\theta)$ en la superficie, estaremos sustituyendo la coordenada t por la coordenada θ en la curva. Esto puede hacerse siempre que $\dot{\theta}(t) \neq 0$, que es nuestro caso.

Usando la regla de la cadena, la función $\varphi(\theta)$ que describe la curva cumple la ecuación:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{\theta}(t)} = \frac{\mu_\varphi \sqrt{\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2}}{\rho(\theta) \sqrt{2m(E - mgh(\theta))\rho(\theta)^2 - \mu_\varphi^2}}$$

Esta es ya una ecuación integrable mediante:

$$\varphi(\theta) = \int \frac{\mu_\varphi \sqrt{\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2}}{\rho(\theta) \sqrt{2m(E - mgh(\theta))\rho(\theta)^2 - \mu_\varphi^2}} d\theta$$

Con ello tendríamos las ecuaciones implícitas de la trayectoria.

Una segunda integral, si se desea, nos lleva a la parametrización de la curva sustituyendo el parámetro θ por el parámetro t :

$$t(\theta) = \int \frac{m\rho(\theta)\sqrt{\rho'(\theta)^2 + h'(\theta)^2}}{\sqrt{2m(E - mgh(\theta))\rho(\theta)^2 - \mu_\varphi^2}} d\theta$$

y con ello, calculando la función inversa, a la solución $\sigma(t) = (\varphi(\theta(t)), \theta(t))$.

Resumiendo, la existencia de la simetría ha permitido, en un primer paso, reducir el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Estas ecuaciones admiten de nuevo a $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ como simetría, lo cual indica que estamos ante un sistema con variables separadas y permite terminar la integración de las ecuaciones con el cálculo de un par de integrales.

La dificultad ahora en casos concretos ya no radica en la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en las funciones $\{\varphi(t), \theta(t)\}$ sino en la forma de expresar analíticamente las integrales arriba indicadas, que ya en casos simples conducen a integrales elípticas.