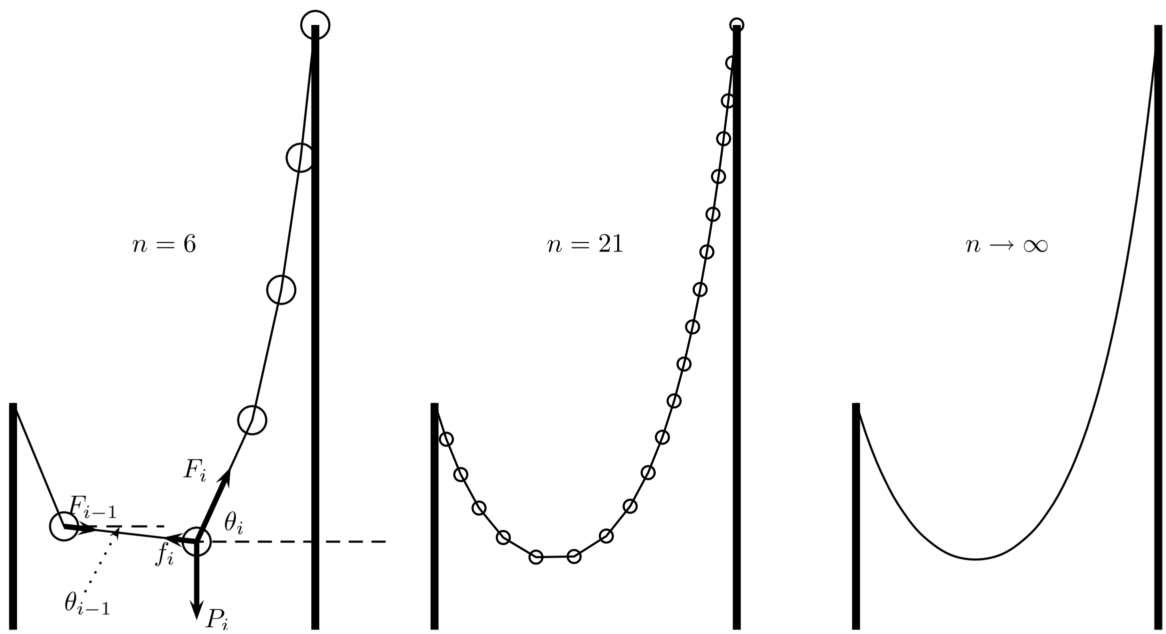
La catenaria

Se denomina "Catenaria" a la curva que describe una cuerda que cuelga de dos puntos, sujeta únicamente a la acción de la gravedad. Determinar su ecuación.

El modelo

Tengamos una cuerda homogénea de longitud L y de densidad lineal de masa ρ Kg/m. Primero estudiaremos las fuerzas que actúan sobre dicha cuerda suponiendo que esta se compone de n masas puntuales equidistantes (cadena de n eslabones), y veremos qué valores toman dichas fuerzas si las masas están en equilibrio. Por un procedimiento de paso al límite cuando $n \to \infty$, las ecuaciones obtenidas permitirán deducir propiedades de la catenaria.

Catenaria:



La física

Modelamos la cuerda como un objeto compuesto de n masas puntuales unidas entre sí y a los puntos de sujección por barras sin masa, de longitud L/n. Puesto que la masa total de la cuerda es ρL, la masa de cada eslabón será de ρh donde $h = L/n$ es la longitud de cada una de las barras de unión, que formarán un ángulo con la horizontal al que denotamos por θ_i.

Cada uno de estos eslabones está en equilibrio, mientras experimenta las siguientes fuerzas:

- Una fuerza de intensidad $P_i = g\rho h$, en dirección vertical (Peso del cuerpo, dado por mg, siendo g la constante gravitatoria y $m = \rho L/n$ la masa del cuerpo).

- Una fuerza de intensidad F_i en la dirección de la barra que tira de él uniéndole con el eslabón siguiente.

- Una fuerza de intensidad f_i en la dirección de la barra que tira de él uniéndole con el eslabón anterior.

Las leyes de Newton nos dicen que las fuerzas que ambos cuerpos intercambian a través de la barra de unión son de la misma intensidad y con direcciones opuestas, así pues $f_i = F_{i-1}$. Como las fuerzas equilibran el cuerpo, esto implica que:

$$(F_i\cos\theta_i, F_i\sin\theta_i) - (f_i\cos\theta_{i-1}, f_i\sin\theta_{i-1}) - (0, P_i) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \dfrac{F_i\cos\theta_i - F_{i-1}\cos\theta_{i-1}}{h} = 0 \\ \dfrac{F_i\sin\theta_i - F_{i-1}\sin\theta_{i-1}}{h} = g\rho \end{array} \right\}$$

El paso al límite

Pensemos qué ocurre con un punto de la cuerda que se encuentre a una distancia $s \in [0, L]$ del extremo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $s \in [(k-1)L/n, kL/n]$, llamaremos $F^n(s)$ y $\theta^n(s)$ al valor que toman F_k y θ_k en la cadena de n eslabones antes descrita (puesto que estamos hablando de un punto $\alpha(s)$ que en dicha cadena estaría entre el $(k-1)$-ésimo y el k-ésimo). Asumiremos que $\lim F^n(s)$ y $\lim \theta^n(s)$ existen y son funciones diferenciables $F(s)$ y $\theta(s)$.

De forma análoga, para cada $s \in [(k-1)L/n, kL/n]$ podemos llamar $(x^n(s), y^n(s))$ a la posición que ocupa el eslabón k-ésimo en la cadena de n eslabones; además estas posiciones determinan los ángulos θ_i de forma que

$$\left(\frac{x^n(s+h) - x^n(s)}{h}, \frac{y^n(s+h) - y^n(s)}{h}\right) = (\cos\theta^n(s), \sin\theta^n(s))$$

Las coordenadas en la catenaria $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ pueden definirse por un límite de las funciones $x^n(s), y^n(s)$.

Las ecuaciones anteriores pasan en el límite a decirnos que las funciones $F(s)$ y $\theta(s)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty \\ (h=L/n\to 0)}} \frac{F^n(s+h)\cos\theta^n(s+h) - F^n(s)\cos\theta^n(s)}{h} = 0 \\ \displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty \\ (h=L/n\to 0)}} \frac{F^n(s+h)\sin\theta^n(s+h) - F^n(s)\sin\theta^n(s)}{h} = \rho g \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{ds}(F(s)\cos\theta(s)) = 0 \\ \dfrac{d}{ds}(F(s)\sin\theta(s)) = \rho g \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty \\ (h=L/n\to 0)}} \frac{x^n(s+h) - x^n(s)}{h} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (h=L/n\to 0)}} \cos\theta^n(s) \\ \displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty \\ (h=L/n\to 0)}} \frac{y^n(s+h) - y^n(s)}{h} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (h=L/n\to 0)}} \sin\theta^n(s) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{ds}x(s) = \cos\theta(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s) = \sin\theta(s) \end{array} \right\}$$

De aquí deducimos que $\theta(s)$ es el ángulo que forma con la horizontal el vector tangente a la catenaria en $\alpha(s)$ y que s representa la parametrización por longitud de arco.

Resolviendo las ecuaciones

Tenemos ecuaciones diferenciales que describen la catenaria. Para obtenerlas, hemos supuesto que existen los límites indicados y que son funciones diferenciables. En todo caso, los argumentos anteriores justificarían llamar catenaria a una curva $(x(s), y(s))$ para la que se verifique el sistema de ecuaciones diferenciales para algún valor de $F(s), \theta(s)$. Ahora sólo necesitamos integrar dichas ecuaciones.

Un primer paso nos lleva a: $F(s)\cos\theta(s) = F_0$, $F(s)\sin\theta(s) = \rho g s + c_0$. Si denotamos $s_0 = \frac{-c_0}{\rho g}$, tendremos:

$$\left\{ \begin{array}{r} F(s)\cos\theta(s) = F_0 \\ F(s)\sin\theta(s) = \rho g(s - s_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} F(s) = \sqrt{F_0^2 + \rho^2 g^2 (s-s_0)^2} \\ \dot{x}(s) = \cos\theta(s) = \dfrac{F_0}{\sqrt{F_0^2 + \rho^2 g^2 (s-s_0)^2}} \\ \dot{y}(s) = \sin\theta(s) = \dfrac{\rho g (s - s_0)}{\sqrt{F_0^2 + \rho^2 g^2 (s-s_0)^2}} \end{array} \right\}$$

Podemos integrar $\dot{y}(s)$ usando $u = \rho^2 g^2 (s-s_0)^2$, $du = 2\rho^2 g^2 (s - s_0) ds$:

$$y(s) = \int \dot{y}(s) ds = \int \frac{du}{2\rho g \sqrt{F_0^2 + u}} = \frac{\sqrt{F_0^2 + u}}{\rho g} + cte = \frac{\sqrt{F_0^2 + \rho^2 g^2 (s-s_0)^2} - F_0}{\rho g} + y_0$$

(para $y_0 = cte + F_0/(\rho g)$). La interpretación de s_0, como puede verse, es que en $s = s_0$ se alcanza el menor valor de $y(s)$ posible, el punto más bajo de la catenaria. Este valor mínimo resulta ser precisamente y_0.

De la fórmula $F(s)$, observamos que la tensión de la cuerda es mayor cuanto más nos alejemos de este punto.

Para integrar $\dot{x}(s)$, usando $u = \rho g(s-s_0) + \sqrt{\rho^2 g^2 (s-s_0)^2 + F_0^2}$, $du = \rho g \frac{\sqrt{\rho^2 g^2 (s-s_0)^2 + F_0^2} + \rho g (s-s_0)}{\sqrt{\rho^2 g^2 (s-s_0)^2 + F_0^2}}$:

$$x(s) = \int \dot{y}(s) ds = \int \frac{F_0}{\rho g} \frac{du}{u} = \frac{F_0}{\rho g} \log(u) + cte' = \frac{F_0}{\rho g} \log\left(\frac{\rho g}{F_0}(s-s_0) + \sqrt{\frac{\rho^2 g^2}{F_0^2}(s-s_0)^2 + 1} \right) + x_0$$

(para $x_0 = cte' + F_0 \log F_0/(\rho g)$). La interpretación de (x_0, y_0) vendrá dado porque el punto más bajo de la catenaria $(s = s_0)$ tiene coordenadas (x_0, y_0).

Cambiando de parámetro, si tomamos $k = \frac{F_0}{\rho g}$ y $t = \frac{s-s_0}{k} = \frac{\rho g}{F_0}(s-s_0)$, las ecuaciones de la catenaria son:

$$\begin{cases} x(t) = k \log(t + \sqrt{1+t^2}) + x_0 \\ y(t) = k(\sqrt{1+t^2} - 1) + y_0 \end{cases} ; \quad t = \frac{s-s_0}{k}$$

Uso de las ecuaciones para calcular la longitud de un arco de catenaria

Ahora si conocemos los extremos de la catenaria, $\alpha(0) = (a,b)$ y $\alpha(L) = (c,d)$, tendríamos sistema de 4 ecuaciones para las cuatro incógnitas x_0, y_0, s_0, k. A partir de la longitud L y de los extremos, podemos obtener los valores de estas constantes y las ecuaciones de la catenaria.

Hay que destacar que para una catenaria dada (esto es, fijados x_0, y_0, s_0, k), si se conoce $x(s)$, podemos recuperar s:

En efecto, con los datos mencionados podemos calcular $\lambda = \frac{x-x_0}{k}$. Según las ecuaciones, λ se relaciona con s a través de:

$$\lambda = \log(t + \sqrt{1+t^2}); \quad t = \frac{s-s_0}{k}$$

Tomando exponenciales, tendremos:

$$\frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2} = \frac{1}{2}\left(\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) - \frac{1}{t + \sqrt{t^2+1}} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2 + (t^2+1) + 2t\sqrt{t^2+1} - 1}{t + \sqrt{t^2+1}} \right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2t(t + \sqrt{t^2+1})}{t + \sqrt{t^2+1}} \right) = t$$

La función $\lambda \mapsto \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2} = \sinh \lambda$ se denomina función seno hiperbólico. Según acabamos de probar, dado x, se puede recuperar s mediante:

$$\frac{s-s_0}{k} = \sinh \frac{x-x_0}{k}$$