Llamemos en los sucesivo $\mathcal{A}$ al conjunto de las funciones complejas de variable real, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (donde $f(t) = x(t)+y(t)i$ con $x(t)$ e $y(t)$ funciones reales) cuyas partes real e imaginaria $(x(t), y(t))$ son funciones diferenciables. Con la suma habitual de funciones y el producto natural de funciones con escalares, este es un espacio vectorial complejo (y real) de dimensión infinita . Un subespacio (real) suyo es el de las funciones con parte imaginaria nula, al que denotaremos por $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ y que se identifica con el espacio de las funciones reales diferenciables.

Definición. *Llamaremos* ***operador derivada*** *a la aplicación lineal $D\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definida por $D(x(t) + y(t)i) = x'(t) + y'(t)i$, donde $x'(t)$ e $y'(t)$ denotan la derivada de las funciones $x(t)$, $y(t)$.*

Por las propiedades de linealidad de la derivada, es fácil observar que D es un endomorfismo del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathcal{A}$. Es más, D transforma funciones reales en funciones reales, por lo que es también un endomorfismo del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Tanto para las funciones reales como para las complejas el operador D así definido cumple $D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)$, como puede comprobarse sólo con usar la regla de derivación del producto.

Considérese el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $M^{n\times m}(\mathcal{A})$ de las matrices $n \times m$ con coeficientes en $\mathcal{A}$ (análogamente $M^{n\times m}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}})$). En este espacio se puede definir también un **operador derivada** mediante la ley:

$$D\begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(f_{11}) & \dots & D(f_{1m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D(f_{n1}) & \dots & D(f_{nm}) \end{pmatrix}$$

De nuevo, D establece un endomorfismo de espacios vectoriales en $M^{n\times m}(\mathcal{A})$ y en $M^{n\times m}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}})$. Además, dadas dos matrices:

$$M = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nm} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & \dots & g_{nr} \end{pmatrix}$$

Nota. *Se tiene que $D(M \cdot N) = D(M) \cdot N + M \cdot D(N)$, al ser $D((M \cdot N)_{ij}) = D(\sum_k f_{ik}g_{kj}) = \sum_k (D(f_{ik})g_{kj} + f_{ik}D(g_{kj}))) = (D(M) \cdot N)_{ij} + (M \cdot D(N))_{ij}$.*

Definición. *Llamaremos* ***sistema de ecuaciones diferenciales lineales*** *al problema consistente en la búsqueda de todas las soluciones posibles del sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + g_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + g_2(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + g_n(t) \end{cases}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ($o \in \mathbb{R}$)

Este sistema puede reescribirse en la forma siguiente: encontrar el elemento $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ de $M^{1\times n}(\mathcal{A})$ tal que

$$D\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

Just to be used for teaching, study and research purposes. For other uses (commercial or personal), contact the author at crodrigo@us.es

siendo $A = (a_{ij})$ la matriz de coeficientes dada por el problema original. Esto es, se pide resolver la ecuación $(D - A\cdot)(X) = G$ donde A es la matriz ya indicada, $G = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$ y X es la incógnita, elemento de $M^{1\times n}(\mathcal{A})$.

Nota. *Si $X_0 \in M^{1\times n}(\mathcal{A})$ es una solución particular, cualquier otra matriz X' es solución si y sólo si $(D - A\cdot)(X') = G = (D - A\cdot)(X_0)$, lo que ocurre sólo si $(D - A\cdot)(X' - X_0) = 0$. Esto es, conocida una solución cualquiera de la ecuación X_0, el resto de las soluciones se obtienen sumando a ésta matrices X anuladas por $(D - A\cdot)$.*

El problema queda entonces reducido a encontrar una **solución particular** X_0 y la solución de la **ecuación homogénea** $(D - A\cdot)(X) = 0$.

Por analogía con las ecuaciones diferenciales lineales con una sola incógnita, haremos uso de un elemento invertible de $M^{n\times n}(\mathcal{A})$ al que denotaremos por e^{At} cuya propiedad básica va a ser que $D(e^{At}) = A \cdot e^{At}$.

Para dicho elemento se cumple la siguiente **fórmula de conmutación**:

$$(D - A\cdot)(e^{At} \cdot Y) = D(e^{At} \cdot Y) - A \cdot e^{At} \cdot Y = e^{At} \cdot D(Y) + D(e^{At}) \cdot Y - A \cdot e^{At} \cdot Y = e^{At} \cdot D(Y)$$

Por lo que, tomando $Y = \left(e^{At}\right)^{-1} \cdot X$, se deduce que un elemento $X = e^{At} \cdot \left(e^{At}\right)^{-1} \cdot X$ pertenece al núcleo de $(D - A\cdot)$ si y sólo si $\left(e^{At}\right)^{-1} \cdot X$ está en el núcleo de D.

Por otra parte el núcleo de D es fácil de calcular: para que $D(x_i(t)) = 0$ se cumpla, la condición necesaria y suficiente es que $x_i(t)$ sean constantes.

Así pues, X es solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales $(D - A\cdot)(X) = 0$ sí y sólo si $\left(e^{At}\right)^{-1} \cdot X$ es una matriz de funciones constantes C. Esto es, la solución general de dicha ecuación es $X = e^{At} \cdot C$ con $C \in M^{1\times n}(\mathbb{C})$.

Se ha probado entonces la validez de la siguiente:

Proposición. *La solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales $(D - A\cdot)(X) = G$ es:*

$$X = X_0 + e^{At} \cdot C$$

siendo X_0 una solución particular y $C \in M^{1\times n}(\mathbb{C})$ una matriz de constantes.

Just to be used for teaching, study
and research purposes. For other uses
(commercial or personal),
contact the author at crodrigo@us.es