Sea $\mathfrak{M} = M^{r^2}(\mathbb{C})$ el espacio vectorial de las matrices de orden $r \times r$ con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{C}$ (análogamente se puede definir $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$ trabajando en el cuerpo $\mathbb{R}$). Consideremos un elemento suyo $A \in \mathfrak{M}$.

En analogía con la definición de la exponencial sobre el cuerpo de los reales: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, se define en $\mathfrak{M}$ la **exponencial de la matriz** $A$ como:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

En esta definición conviene puntualizar una serie de advertencias. Por un lado, se entiende que $A^n = \overbrace{A \cdot \ldots \cdot A}^{n \text{ veces}}$, $A^0 = Id$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ y $0! = 1$. Por otra parte, en la definición aparece una suma de infinitos términos, una serie, cuya convergencia a un elemento de $\mathfrak{M}$ conviene garantizar antes de continuar utilizando este tipo de expresiones. En lo sucesivo admitiremos que todas las series que aparecen en los cálculos que se realizan son convergentes. Este es un resultado nada inmediato pero cuya demostración dejaremos de lado al tratarse de un problema más analítico que algebraico.

Para estudiar las propiedades de la exponencial en $\mathbb{R}$ un instrumento de gran utilidad es el binomio de Newton, que asegura que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Por desgracia (o no), este resultado no es generalizable a elementos de $\mathfrak{M}$. Para generalizarlo, es necesario que los elementos conmuten.

**Proposición (Binomio de Newton).** *Sean $A$ y $B$ dos matrices de $\mathfrak{M}$* ***que conmutan*** *(esto es, $A \cdot B = B \cdot A$). Entonces:*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \cdot B^{n-k}$$

*Demostración.* Para $n = 0$ es inmediato: $(A+B)^0 = Id = 1 \cdot Id \cdot Id = \binom{0}{0} \cdot A^0 \cdot B^0$

Supongamos que la fórmula del binomio es válida para $n-1$:

$$(A+B)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k \cdot B^{n-1-k}$$

Probemos que es válida para $n$.

$$\begin{aligned}
(A+B)^n &= (A+B)^{n-1} \cdot (A+B) = \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k \cdot B^{n-1-k} \right) \cdot (A+B) = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k \cdot B^{n-1-k} \cdot A + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k \cdot B^{n-1-k} \cdot B =^* \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^{k+1} \cdot B^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k \cdot B^{n-k} = \\
&= \sum_{l=1}^{n} \binom{n-1}{l-1} A^l \cdot B^{n-l} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} A^l \cdot B^{n-l} = \\
&= \binom{n-1}{n-1} A^n + \sum_{l=1}^{n-1} \left( \binom{n-1}{l-1} + \binom{n-1}{l} \right) A^l \cdot B^{n-l} + \binom{n-1}{0} B^n = \\
&= A^n + \sum_{l=1}^{n-1} \binom{n}{l} A^l \cdot B^{n-l} + B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \cdot B^{n-k}
\end{aligned}$$

donde en $^*$ hemos utilizado el que $A \cdot B = B \cdot A$ para sustituir $A^k \cdot B^{n-1-k} \cdot A$ por $A^k \cdot A \cdot B^{n-1-k}$. $\square$

Just to be used for teaching, study and research purposes. For other uses (commercial or personal), contact the author at crodrigo@us.es

Este resultado permite establecer una propiedad fundamental de la exponencial cuyo uso será de gran utilidad para el cálculo efectivo de la misma:

**Proposición.** *Si $D$ y $N$ son dos elementos de $\mathfrak{M}$* ***que conmutan****, entonces* $e^{D+N} = e^D \cdot e^N$.

*Demostración.* Por definición:

$$e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k \quad , \quad e^N = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} N^l$$

Multiplicando ambos, tendremos:

$$e^D \cdot e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{l!} D^k \cdot N^l$$

Sumando siempre primero todos los elementos tales que $k + l = n$ para cada $n = 0, \ldots, \infty$, se tiene:

$$\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \cdot D^k \cdot N^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k \cdot N^{n-k} \right)$$

y ahora aplicando la fórmula del binomio de Newton, se concluye:

$$e^D \cdot e^N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (D + N)^n = e^{D+N}$$

□

Otros resultados de interés, fácilmente deducibles utilizando sólo la definición, son:

**Proposición.**

$$e^0 = Id$$

*Demostración.* Es inmediata, ya que por definición $e^0 = Id + 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \ldots$ □

**Proposición.** *Para cualquier matriz invertible $B$ y $A \in \mathfrak{M}$, se cumple:*

$$e^{B \cdot A \cdot B^{-1}} = B \cdot e^A \cdot B^{-1}$$

*Demostración.* Puede observarse que $\left(B \cdot A \cdot B^{-1}\right)^n = B \cdot A^n \cdot B^{-1}$, ya que

$$\begin{aligned} (B \cdot A \cdot B^{-1})^n =& B \cdot A \cdot B^{-1} \cdot B \cdot A \cdot B^{-1} \cdot \ldots \cdot B \cdot A \cdot B^{-1} = \\ =& B \cdot A \cdot Id \cdot A \cdot Id \cdot \ldots \cdot Id \cdot A \cdot B^{-1} = \\ =& B \cdot A \cdot \ldots \cdot A \cdot B^{-1} = B \cdot A^n \cdot B^{-1} \end{aligned}$$

por lo que

$$e^{B \cdot A \cdot B^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (B \cdot A \cdot B^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B \cdot A^n \cdot B^{-1} = B \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) \cdot B^{-1} = B \cdot e^A \cdot B^{-1}$$

□

Just to be used for teaching, study and research purposes. For other uses (commercial or personal), contact the author at crodrigo@us.es

**Nota.** *Este último resultado $e^{B\cdot A\cdot B^{-1}} = B\cdot e^A\cdot B^{-1}$ tiene la siguiente interpretación geométrica: Si un endomorfismo $T$ tiene $A$ por matriz en una cierta base $\{e_i\}$ y $B\cdot A\cdot B^{-1}$ en otra base $\{e_i'\}$ (siendo, por tanto, $B$ la matriz de cambio de base entre ambas), entonces la matriz $e^A$ representa en la base $\{e_i\}$ un cierto endomorfismo $S$ (al que llamaremos exponencial de $T$), que en la base $\{e_i'\}$ tendrá por matriz a $B\cdot e^A\cdot B^{-1} = e^{B\cdot A\cdot B^{-1}}$, por lo que es el endomorfismo asociado a $e^{B\cdot A\cdot B^{-1}}$ en la base $\{e_i'\}$.*

*Por tanto, el endomorfismo asociado a $e^A$ en la base $\{e_i\}$ coincide con el endomorfismo asociado a $e^{B\cdot A\cdot B^{-1}}$ en la base $\{e_i'\}$ y puede hablarse de la **exponencial de un endomorfismo** $T$ como aquel endomorfismo $S$ cuya matriz en una cierta base se obtiene haciendo la exponencial de la matriz de $T$ en dicha base. Según la discusión anterior, el resultado no depende de la base elegida.*

**Nota.** *Puesto que cualquier matriz $A$ conmuta con $-A$, se tiene que $Id = e^0 = e^{A+(-A)} = e^A\cdot e^{-A}$. Así pues, $e^A$ es invertible y su inversa es $e^{-A}$.*

**Nota.** *Por último, veamos que si $D = \frac{d}{dt}$ , entonces $D\left(e^{A\cdot t}\right) = A\cdot e^{A\cdot t}$. Para ello aplicamos $D$, que es lineal, a cada sumando de la serie $\sum \frac{1}{n!}(A\cdot t)^n$ (que es uniformemente convergente), obteniendo con ello:*

$$D\left(e^{A\cdot t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D(A^n\cdot t^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \cdot n\cdot t^{n-1} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} A^n\cdot t^{n-1} = A\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\cdot t^k = A\cdot e^{A\cdot t}$$

Ahora estudiemos cómo calcular la exponencial de una matriz.

- Si $A$ es una **matriz diagonal** $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_r \end{pmatrix}$

  Entonces
  $$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_r^k \end{pmatrix}$$
  Por lo que
  $$e^A = \begin{pmatrix} \sum \frac{1}{k!} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum \frac{1}{k!} a_r^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_r} \end{pmatrix}$$

- Si $A$ es una **matriz nilpotente** ($A^{k+1} = 0$ para algún $k$) entonces la serie es una suma finita:
  $$e^A = Id + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k$$

- Para **una matriz** $A \in \mathfrak{M}$ **cualquiera** existe un cambio de base en el que la matriz toma la forma de Jordan, diagonal más nilpotente:
  $$A = B\cdot (D+N)\cdot B^{-1}$$
  donde $D$ es diagonal, $N$ es nilpotente y ambas conmutan. En este caso
  $$e^A = e^{B\cdot(D+N)\cdot B^{-1}} = B\cdot e^{D+N}\cdot B^{-1} = B\cdot \left(e^D\cdot e^N\right)\cdot B^{-1}$$
  y tanto $e^D$ como $e^N$ pueden ser calculados por los procedimientos ya descritos, por lo que estos permiten calcular la exponencial de cualquier matriz.

SIGILLUM UNIVERSITATIS LITTERARIAE HISPALENSIS

Just to be used for teaching, study and research purposes. For other uses (commercial or personal), contact the author at crodrigo@us.es