Cálculo de Geodésicas en Superficies de Revolución

Superficies de Revolución

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie de revolución obtenida al girar una curva regular del plano XZ que no corte al eje Z alrededor del mismo.

Si la curva está parametrizada en la forma $x = u(\theta)$, $y = 0$, $z = v(\theta)$, con $u(\theta) \neq 0$, entonces la superficie S admite una parametrización regular mediante la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \theta) & \mapsto & (u(\theta)\cos\varphi, u(\theta)\sin\varphi, v(\theta)) \end{array}$$

Esta parametrización regular permite usar (φ, θ) como sistema de coordenadas locales en cualquier punto de la superficie S.

La métrica inducida en S por la métrica $T_2 = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ de $\mathbb{R}^3$ es:

$$g = \tau^*(T_2) = u^2(\theta) d\varphi \otimes d\varphi + (u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2) d\theta \otimes d\theta$$

Luego las matrices asociadas a g y a g^{-1} en la base $\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial}{\partial\theta}$ son:

$$g \equiv \begin{pmatrix} u^2(\theta) & 0 \\ 0 & u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2 \end{pmatrix}, \qquad g^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2(\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2} \end{pmatrix}$$

Usando la expresión en coordenadas locales de los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

Obtenemos para nuestra variedad S y sistema de coordenadas (φ, θ) los siguientes símbolos de Christoffel:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi} = 0, & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = \dfrac{-u(\theta)u'(\theta)}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2} \\ \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \dfrac{u'(\theta)}{u(\theta)}, & \Gamma_{\varphi\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta\varphi}^{\theta} = 0 \\ \Gamma_{\theta\theta}^{\varphi} = 0, & \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \dfrac{u'(\theta)u''(\theta) + v'(\theta)v''(\theta)}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2} \end{array}$$

Llamamos geodésica a toda curva $\sigma \colon \mathbb{R} \to S$ cuyo vector tangente $D = \sigma_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ cumpla $\nabla_D D = 0$.

En un sistema de coordenadas cualquiera, si la curva se expresa como $\sigma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, y si se extrae la componente en $\frac{\partial}{\partial x^i}$ de $\nabla_D D = 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial t} = 0$$

En nuestro caso, usando los correspondiente símbolos de Christoffel, concluimos que una curva $\sigma(t) = (\varphi(t), \theta(t))$ es geodésica si y sólo si:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi'' + \frac{2u'(\theta)}{u(\theta)} \varphi' \theta' \\ 0 &= \theta'' - \frac{u(\theta)u'(\theta)}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2} \varphi' \varphi' + \frac{u'(\theta)u''(\theta) + v'(\theta)v''(\theta)}{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2} \theta' \theta' \end{aligned}$$

Es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con dos incógnitas: las funciones $\varphi(t)$ y $\theta(t)$. Veamos cómo podemos expresarlas en una forma más simple.

Como sabemos, la ecuación $\nabla_D D = 0$ en la dirección del campo D es fácil de integrar:

$$\nabla_D D = 0 \Rightarrow (\nabla_D D) \cdot D = 0 \Leftrightarrow D(D \cdot D) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(D \cdot D) = 0 \Leftrightarrow D \cdot D = \text{cte}$$

Así que la ecuación $\nabla_D D = 0$, al tomar componente en la dirección D, produce una ecuación de segundo orden que se integra fácilmente a una de primer orden: $D \cdot D = \text{cte}$.

Si estamos calculando la geodésica en un punto y una dirección para la que se sepa que $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ y $D = \varphi' \frac{\partial}{\partial \varphi} + \theta' \frac{\partial}{\partial \theta}$ son linealmente independientes, las componentes de $\nabla_D D$ en dichas direcciones nos dan:

$$\nabla_D D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \varphi'' + \dfrac{2u'(\theta)}{u(\theta)} \varphi' \theta' \\ \text{cte} = u^2(\theta)(\varphi')^2 + \left(u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2\right)(\theta')^2 \end{cases}$$

Las únicas curvas que no tienen puntos con estas características son aquellas para las que $\theta' = 0$. Estas curvas son los paralelos $\theta(t) = \overline{\text{cte}}$, y sustituyendo en las ecuaciones originales, son geodésicas si

$$0 = \varphi''(t), \quad 0 = (\varphi'(t))^2 \frac{u(\overline{\text{cte}})u'(\overline{\text{cte}})}{u'(\overline{\text{cte}})^2 + v'(\overline{\text{cte}})^2}$$

Puesto que $u(\overline{\text{cte}}) \neq 0$, la segunda ecuación se verifica sólo si $\varphi(t) = \text{cte}'$ (que determina un punto y no una curva), o para $u'(\overline{\text{cte}}) = 0$. Los únicos paralelos

$\theta = \overline{\text{cte}}$ que son geodésicas son aquellos donde el radio $u(\overline{\text{cte}})$ sea máximo o mínimo relativo.

Volviendo al caso general:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi'' + \frac{2u'(\theta)}{u(\theta)}\varphi'\theta' \\ \text{cte} &= u^2(\theta)(\varphi')^2 + \left(u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2\right)(\theta')^2 \end{aligned}$$

La primera ecuación puede integrarse:

$$0 = \varphi'' + \frac{2u'(\theta)}{u(\theta)}\varphi'\theta' \Leftrightarrow \frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{-2u'(\theta)}{u(\theta)}\theta' \Leftrightarrow \log\left(\varphi'(t)\right) = -2\log\left(u(\theta(t))\right) + \text{cte} \Leftrightarrow \varphi'(t) = \frac{k}{u^2(\theta(t))}$$

Luego si somos capaces de obtener $\theta(t)$, integrando se obtiene $\varphi(t)$.

Sustituyendo ahora en la segunda ecuación, obtendremos:

$$\text{cte} = u^2(\theta)\left(\frac{k}{u^2(\theta)}\right)^2 + \left(u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2\right)(\theta')^2 \Leftrightarrow \theta' = \frac{\sqrt{\text{cte} \cdot u^2(\theta) - k^2}}{u(\theta)\sqrt{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2}}$$

Si sabemos resolver esta ecuación diferencial de primer orden en $\theta(t)$ obtendremos la geodésica, con su parametrización.

Por otra parte, en muchas ocasiones sólo nos interesa la curva, y no nos importa parametrizar de una u otra forma. En tal caso, podemos prescindir del parámetro t y suponer que la curva está dada por una ecuación implícita $\varphi = \varphi(\theta)$. Estamos sustituyendo la coordenada t por la coordenada θ en la curva. Esto puede hacerse siempre que $\theta'(t) \neq 0$, que es nuestro caso (recordemos que estamos suponiendo D y $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ linealmente independientes).

En esta situación, usando la regla de la cadena, la función $\varphi(\theta)$ que describe la curva cumple la ecuación:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\varphi'(t)}{\theta'(t)} = \frac{k\sqrt{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2}}{u(\theta)\sqrt{\text{cte} \cdot u^2(\theta) - k^2}}$$

En este caso, ya no es necesario resolver una ecuación diferencial, sino que una simple integral permite obtener las ecuaciones implícitas de la geodésica:

$$\varphi(\theta) = \int \frac{\sqrt{u'(\theta)^2 + v'(\theta)^2}}{u(\theta)\sqrt{\text{cte}' \cdot u^2(\theta) - 1}}d\theta$$

Si se desea obtener su parametrización asociada, se puede hacer mediante el cálculo de otra integral.

El caso $k = 0$ nos proporciona como geodésicas los meridianos $\varphi = \text{cte}$.

Ejemplos

Geodésicas del cilindro

En este caso, las funciones $u(\theta)$, $v(\theta)$ definen una recta paralela al eje Z, esto es, $u(\theta) = a$, $v(\theta) = \theta$. Las ecuaciones implícitas de las geodésicas que no son paralelos serán $\varphi = \varphi(\theta)$ con:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{k\sqrt{0^2 + 1^2}}{a\sqrt{\text{cte} \cdot a^2 - k^2}}$$

Por tanto $\frac{d\varphi}{d\theta} = \alpha$ y la curva es $\varphi = \alpha \cdot \theta + \beta$. Los valores de α y β dependen del punto y dirección por los que pase la curva.

En cuanto a las geodésicas que son paralelos, son las curvas $\theta = \overline{\text{cte}}$ con $u'(\overline{\text{cte}}) = 0$, que en este caso se verifica para todos los valores. Todos los paralelos son geodésicas.

Geodésicas del cono

En este caso, las funciones $u(\theta)$, $v(\theta)$ definen una recta en el plano XZ no paralela al eje Z, esto es, $u(\theta) = m\theta + b$, $v(\theta) = \theta$ con $m \neq 0$. Mediante una traslación podemos suponer $b = 0$.

Las ecuaciones implícitas de las geodésicas que no son paralelos serán $\varphi = \varphi(\theta)$ con:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{k\sqrt{m^2 + 1^2}}{(m\theta + b)\sqrt{\text{cte} \cdot (m\theta + b)^2 - k^2}}$$

Cambiando de nombre a las constantes, tenemos:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\gamma}{\theta\sqrt{\theta^2 - \beta^2}} \Rightarrow \varphi(\theta) = \int \frac{\gamma}{\theta\sqrt{\theta^2 - \beta^2}} d\theta = \frac{-\gamma}{\beta^2} \arctan \frac{\beta}{\sqrt{\theta^2 - \beta^2}}$$

Las geodésicas son las curvas de la forma

$$\varphi = a \cdot \arctan \frac{\beta}{\sqrt{\theta^2 - \beta^2}}$$

Por tanto, las curvas de la forma: $\beta = \sqrt{\theta^2 - \beta^2} \cdot \tan \frac{\varphi}{a}$

En cuanto a los paralelos que son geodésicas, como $u'(\theta) = m \neq 0$, no hay paralelos que sean geodésicas.

Geodésicas del paraboloide de revolución

El paraboloide de revolución es la superficie de revolución que se obtiene al girar una parábola en el plano XZ respecto de su eje. Las funciones que determinan esta superficie son, por tanto: $u(\theta) = \theta$, $v(\theta) = m\theta^2$, con $m \neq 0$.

Las geodésicas quedan caracterizadas por:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{k\sqrt{1^2 + (2m\theta)^2}}{\theta\sqrt{\text{cte} \cdot \theta^2 - k^2}}$$

Cambiando de nombre a las constantes, tenemos:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \lambda \frac{\sqrt{\theta^2 + \left(\frac{1}{2m}\right)^2}}{\theta\sqrt{\theta^2 - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2}} \Rightarrow \varphi(\theta) = \int \lambda \frac{\sqrt{\theta^2 + \left(\frac{1}{2m}\right)^2}}{\theta\sqrt{\theta^2 - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2}} d\theta$$

En cuanto a las geodésicas que son paralelos, como $u'(\theta) = 1 \neq 0$, no existen tales geodésicas.

Geodésicas del toro

El toro se obtiene al girar una circunferencia en el plano XZ que no corte al eje Z. Las funciones que describen el toro son $u(\theta) = a\cos\theta + b$, $v(\theta) = a\sin\theta$, donde $b > a > 0$.

Respecto a qué paralelos $\theta = \overline{\text{cte}}$ son geodésicas, puesto que $u'(\theta) = -a\sin\theta$, sólo se dan para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, que son la circunferencia interior y exterior del toro.

El resto de las geodésicas quedan caracterizadas por:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{ak}{(a\cos\theta + b)\sqrt{\text{cte} \cdot (a\cos\theta + b)^2 - k^2}}$$

Geodésicas de la esfera

Al girar alrededor del eje Z la circunferencia unidad centrada en el origen en el plano XZ obtenemos la esfera. Las funciones que la caracterizan serán $u(\theta) = \sin\theta$, $v(\theta) = \cos\theta$.

Las geodésicas están entonces caracterizadas por:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{k}{\sin\theta\sqrt{\text{cte} \cdot \sin^2\theta - k^2}}$$

Para que exista solución, cte debe ser positivo, por lo que puede ponerse en la forma a^2. La ecuación de la geodésica se obtiene por integración de:

$$\varphi(\theta) = \int \frac{k/a}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - (k/a)^2}} d\theta$$