

Teorema de inercia de Sylvester

Recordemos

En un espacio Euclídeo (E, g) , asociada a cualquier métrica simétrica T_2 siempre existe un endomorfismo T autoadjunto (esto es, $g(T(e), e') = g(e, T(e'))$) definido por:

$$g(T(e), e') = T_2(e, e'), \quad \forall e, e' \in E, \quad \text{o equivalentemente} \quad T = P_g^{-1} \circ P_{T_2}$$

donde P_g y P_{T_2} son las polaridades $E \rightarrow E^*$ asociadas a las métricas g y T_2 , respectivamente.

Definición: Se llama **base ortonormal generalizada** para una métrica simétrica T_2 en un espacio vectorial real a toda base suya $\{v_1, \dots, v_n\}$ formada por vectores ortogonales entre sí $T_2(v_i, v_j) = 0 \forall i \neq j$, y que además cumplen $T_2(v_i, v_i) = 0$ ó 1 ó -1 .

Teorema espectral: Todo endomorfismo autoadjunto T en un espacio vectorial Euclídeo (E, g) diagonaliza en una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal para g . La matriz asociada a la métrica g y al endomorfismo T en dicha base, por tanto, es:

$$g \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Consideremos el endomorfismo T asociado a la métrica Euclídea T_2 en el espacio Euclídeo (E, g) y la base arriba mencionada. En esta situación, si la base indicada anteriormente está formada por $e_1, \dots, e_k$, vectores propios con valor propio nulo; $e_{k+1}, \dots, e_{k+k'}$, vectores propios con valores propios positivos $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+k'} > 0$ y $e_{k+k'+1}, \dots, e_{k+k'+k''}$, (con $k + k' + k'' = n$) vectores propios con valores propios negativos $\alpha_{k+k'+1}, \dots, \alpha_{k+k'+k''} < 0$, entonces la matriz asociada a T_2 en la base formada por los vectores e_i ($i = 1, \dots, k$), los vectores $e'_i = \frac{e_{k+i}}{\sqrt{\alpha_{k+i}}}$ ($i = 1, \dots, k'$) y los vectores $e''_i = \frac{e_{k+k'+i}}{\sqrt{-\alpha_{k+k'+i}}}$ ($i = 1, \dots, k''$) es:

$$T_2 \equiv \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{k' \times k'} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Id}_{k'' \times k''} \end{pmatrix}$$

La base formada por dichos vectores es, por tanto, una base ortonormal generalizada.

Existencia de Bases ortonormales generalizadas. Rango, índice y signatura

En esta lección veremos que para toda métrica simétrica en un espacio vectorial real existen bases ortonormales generalizadas y que el número de ceros, unos y menos unos que aparecen en la matriz asociada a T_2 no depende de la base ortonormal generalizada que se elija.

Teorema. Si E es un espacio vectorial real y T_2 es una métrica simétrica, entonces existe en E una base ortonormal generalizada para T_2 . El número de 0's, 1's y -1's en la matriz asociada no depende de la base ortonormal generalizada elegida.

Demostración. Si E es un espacio vectorial real, puede definirse una métrica Euclídea g en E considerando una base cualquiera y la métrica cuya matriz en dicha base es $\text{Id}_{n \times n}$. Como se ha visto, partiendo de T_2 y de g se puede considerar el endomorfismo autoadjunto T asociado a T_2 y a la métrica Euclídea g . Existe una base en la que T diagonaliza y que es ortonormal para g (teorema espectral) y dividiendo estos vectores por $\sqrt{\alpha_i}$ si su valor propio es $\alpha_i > 0$, entre $\sqrt{-\alpha_i}$ si su valor propio es $\alpha_i < 0$ o dejándolos tal cual si su valor propio es 0, se obtiene una base $\{e_1, \dots, e_k, e'_1, \dots, e'_{k'}, e''_1, \dots, e''_{k''}\}$ en la cual la matriz de T_2 es:

$$T_2 \equiv \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{k' \times k'} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Id}_{k'' \times k''} \end{pmatrix}$$

Con lo que se prueba la existencia de bases ortonormales generalizadas.

Para la segunda parte del teorema, si $\{e_1, \dots, e_k, e'_1, \dots, e'_{k'}, e''_1, \dots, e''_{k''}\}$ y $\{v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_{m'}, v''_1, \dots, v''_{m''}\}$ son dos bases ortonormales generalizadas distintas, en las que la matriz de T_2 es, respectivamente:

$$T_2 \equiv \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{k' \times k'} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Id}_{k'' \times k''} \end{pmatrix}, \quad T_2 \equiv \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{m' \times m'} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Id}_{m'' \times m''} \end{pmatrix}$$

pretendemos probar que $k = m$, $k' = m'$ y $k'' = m''$.

Veamos que $\ker(P_{T_2}) = \langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

En efecto, la matriz de la polaridad en la base $\{e_1, \dots, e_k, e'_1, \dots, e'_{k'}, e''_1, \dots, e''_{k''}\}$ de E y su dual en E^*

es la misma matriz que la de T_2 en dicha base, por tanto $P_{T_2} \equiv \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{k' \times k'} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Id}_{k'' \times k''} \end{pmatrix}$. Usando

esta expresión, un vector e de coordenadas $(\mu_1, \dots, \mu_k, \mu'_1, \dots, \mu'_{k'}, \mu''_1, \dots, \mu''_{k''})$ estará en el núcleo de P_{T_2} si y sólo si:

$$\begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{k' \times k'} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Id}_{k'' \times k''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu''_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual se cumple si y sólo si $\mu'_i = 0$, $\mu''_i = 0 \forall i$. Así pues, $\ker(P_{T_2}) = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.

El mismo argumento trabajando ahora en la base $\{v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_{m'}, v''_1, \dots, v''_{m''}\}$ prueba que $\ker(P_{T_2}) = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Por tanto $k = m = \dim \ker(P_{T_2})$

Falta ahora probar las otras dos igualdades $k' = m'$ y $k'' = m''$. Puesto que $k + k' + k'' = m + m' + m'' = \dim E$ y $k = m$, bastará con probar una de ellas.

Veamos que al intercambiar los vectores $e'_1, \dots, e'_{k'}$ por $v''_1, \dots, v''_{m''}$ seguimos teniendo una colección de vectores linealmente independientes $\{e_1, \dots, e_k, e'_1, \dots, e'_{k'}, v''_1, \dots, v''_{m''}\}$. Si probamos que esto es así, tendremos $k + k' + m'' \leq n = k + k' + k''$, luego $m'' \leq k''$.

En efecto, si tuviésemos una combinación lineal que se anulase:

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 e'_1 + \dots + \mu_{k'} e'_{k'} + \gamma_1 v''_1 + \dots + \gamma_{m''} v''_{m''} = 0$$

Entonces:

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 e'_1 + \dots + \mu_{k'} e'_{k'} = -\gamma_1 v''_1 - \dots - \gamma_{m''} v''_{m''}$$

y calculando el producto escalar mediante T_2 en ambos miembros, teniendo en cuenta los vectores que son ortogonales entre sí:

$$\begin{aligned} T_2(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 e'_1 + \dots + \mu_{k'} e'_{k'}, \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 e'_1 + \dots + \mu_{k'} e'_{k'}) &= \\ &= \lambda_1^2 T_2(e_1, e_1) + \dots + \lambda_k^2 T_2(e_k, e_k) + \mu_1^2 T_2(e'_1, e'_1) + \dots + \mu_{k'}^2 T_2(e'_{k'}, e'_{k'}) = \mu_1^2 + \dots + \mu_{k'}^2 \geq 0 \\ T_2(-\gamma_1 v''_1 - \dots - \gamma_{m''} v''_{m''}, -\gamma_1 v''_1 - \dots - \gamma_{m''} v''_{m''}) &= \\ &= \gamma_1^2 T_2(v''_1, v''_1) + \dots + \gamma_{m''}^2 T_2(v''_{m''}, v''_{m''}) = -\gamma_1^2 - \dots - \gamma_{m''}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Puesto que ambas expresiones deben coincidir, la única posibilidad es $\mu_i = 0$, $\gamma_i = 0 \forall i$. A partir de ello se obtiene además $\lambda_i = 0$ (ya que los vectores $e_1, \dots, e_k$ son linealmente independientes).

Concluimos con ello que $\{e_1, \dots, e_k, e'_1, \dots, e'_{k'}, v''_1, \dots, v''_{m''}\}$ son linealmente independientes, y por tanto $k + k' + m'' \leq n = k + k' + k''$. Esto es, $m'' \leq k''$.

El mismo argumento intercambiando el papel de los vectores e por los vectores v prueba que los vectores $\{v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_{m'}, e''_1, \dots, e''_{k''}\}$ son linealmente independientes y que $m + m' + k'' \leq n = m + m' + m''$. Esto es $k'' \leq m''$.

Ello prueba $k'' = m''$, y puesto que $k = m$ y $k + k' + k'' = n = m + m' + m''$, se concluye que también $k' = m'$. $\square$

Definición: Si T_2 es una métrica simétrica en un espacio vectorial real y $\{e_1, \dots, e_k, e'_1, \dots, e'_{k'}, e''_1, \dots, e''_{k''}\}$ es una base ortonormal generalizada respecto de la cual la matriz de T_2 es:

$$T_2 \equiv \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{k' \times k'} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Id}_{k'' \times k''} \end{pmatrix}$$

entonces

- Llamaremos **rango** de T_2 a la dimensión de la imagen (esto es, el rango) de la polaridad P_{T_2} .

$$\text{rg}(T_2) = \dim \text{Img}(P_{T_2}) = n - \dim \ker(P_{T_2}) = n - k = k' + k''$$

- Llamaremos **índice** de T_2 al menor de los valores k' y k'' :

$$\text{ind}(T_2) = \min(k', k'')$$

- Diremos que la métrica tiene **signatura** positiva (o bien +1) si $k' > k''$, negativa (o bien -1) si $k'' < k'$ y que no está definida (o bien que es 0) si $k' = k''$.

$$\text{sgn}(T_2) = \begin{cases} +1 & \text{si } k' > k'' \\ -1 & \text{si } k'' > k' \\ 0 & \text{si } k' = k'' \end{cases}$$

Hay que hacer notar que conociendo el rango, el índice y la signatura de una métrica, se recuperan los valores k , k' y k'' .

Cálculo efectivo de rango, índice y signatura

Según hemos visto, para construir una base ortonormal generalizada para T_2 basta diagonalizar el endomorfismo $T = P_g^{-1} \circ P_{T_2}$ en una base ortonormal para g y dividir los vectores de esta base por ciertos escalares. El número de 0's, 1's y -1's que se obtienen en la matriz de T_2 (que son nuestros k , k' y k'') coinciden entonces con el número de vectores en la base de diagonalización cuyo valor propio es 0, positivo o negativo, respectivamente.

Tomemos el polinomio característico $p_c(x)$ del endomorfismo T . Este polinomio se conoce por **polinomio secular** asociado al par de métricas T_2 y g y depende de la métrica Euclídea g elegida. Puesto que T diagonaliza, podemos concluir que $p_c(x)$ tiene todas sus raíces reales, y si llamamos n_0 , n_+ y n_- al número de raíces nulas, positivas y negativas (contadas con su multiplicidad) del polinomio $p_c(x)$, existirá una base de diagonalización para T ortogonal para g , con n_0 vectores de valor propio 0, n_+ vectores con valor propio positivo y n_- vectores con valor propio negativo.

A partir de esta base se obtiene una base ortonormal generalizada para T_2 , donde $k = n_0$, $k' = n_+$ y $k'' = n_-$. El rango, índice y signatura de T_2 puede obtenerse, por tanto, a partir del número de raíces positivas, negativas y nulas del polinomio secular $p_c(x)$. Por el teorema que hemos probado hoy, el resultado debe ser independiente de la métrica euclídea g que se elija para construir la base ortonormal generalizada. El número de raíces positivas, negativas y nulas del polinomio secular no depende de la métrica Euclídea g elegida.

Clasificación de la métrica T_2 :

$$T_2, \text{ métrica euclídea auxiliar } g \Rightarrow T = P_g^{-1} \circ P_{T_2} \Rightarrow p_c(x) = \det(x\text{Id} - T) \Rightarrow \begin{cases} n_0 \text{ raíces nulas} \\ n_+ \text{ raíces positivas} \\ n_- \text{ raíces negativas} \end{cases}$$

$$\text{rg}(T_2) = n - n_0, \quad \text{ind}(T_2) = \min(n_+, n_-), \quad \text{sgn}(T_2) = \begin{cases} +1 & \text{si } n_+ > n_- \\ -1 & \text{si } n_- > n_+ \\ 0 & \text{si } n_+ = n_- \end{cases}$$

Nota: En general, no es necesario obtener las raíces de $p_c(x)$ (existen, pero no necesariamente podemos calcularlas), sino sólo saber cuántas son positivas, cuántas negativas y cuántas nulas. Esto puede calcularse fácilmente por el método de las variaciones de signo de Descartes.