

NOTAS DE RESUMEN DE CÁLCULO EN VARIEDADES

César Rodrigo Fernández

Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Sevilla



Cálculo de Cartan en variedades.

M variedad diferenciable n -dimensional.

$\mathcal{C}^\infty(M)$ su anillo de funciones diferenciables.

$\mathfrak{X}(M)$ su $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo de campos vectoriales diferenciables.

$\Omega_1(M)$ su $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo de 1-formas diferenciables.

$T(M) = \bigoplus_{r,s} T_r^s(M)$ el álgebra tensorial de M.

$\Omega(M) = \bigoplus_r \Omega_r(M)$ el álgebra exterior de M.

S_r =Grupo simétrico r = Grupo de permutaciones de los elementos $\{1, \dots, r\}$

PRODUCTO TENSORIAL

Campos de tensores r -covariantes, s -contravariantes en M:

$T_r^s(M) = \text{Multlin}(\mathfrak{X}(M) \times \dots^{(r)} \times \mathfrak{X}(M) \times \Omega_1(M) \times \dots^{(s)} \times \Omega_1(M), \mathcal{C}^\infty(M))$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) \times \dots^{(r)} \times \mathfrak{X}(M) \times \Omega_1(M) \times \dots^{(s)} \times \Omega_1(M) &\xrightarrow{T_r^s} \mathcal{C}^\infty(M) \\ (D_1, \dots, D_r, \omega^1, \dots, \omega^s) &\mapsto T_r^s(D_1, \dots, D_r, \omega^1, \dots, \omega^s) \end{aligned}$$

Se define $T_0^0(M)$ como $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Definición: $(T_r^s, \bar{T}_{\bar{r}}^{\bar{s}}) \in T_r^s(M) \times T_{\bar{r}}^{\bar{s}}(M) \mapsto T_r^s \otimes \bar{T}_{\bar{r}}^{\bar{s}} \in T_{r+\bar{r}}^{s+\bar{s}}(M)$

$$(T_r^s \otimes \bar{T}_{\bar{r}}^{\bar{s}})(D_1, \dots, D_{r+\bar{r}}, \omega^1, \dots, \omega^{s+\bar{s}}) = T_r^s(D_1, \dots, D_r, \omega^1, \dots, \omega^s) \cdot \bar{T}_{\bar{r}}^{\bar{s}}(D_{r+1}, \dots, D_{r+\bar{r}}, \omega^{s+1}, \dots, \omega^{s+\bar{s}})$$

Y se define $f \otimes T_r^s = f \cdot T_r^s$ para $f \in T_0^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$.

Propiedades:

- $(T(M), +, \otimes)$ es una $\mathcal{C}^\infty(M)$ -álgebra
 - Asociativa: $(T_r^s \otimes \bar{T}_{\bar{r}}^{\bar{s}}) \otimes \hat{T}_{\hat{r}}^{\hat{s}} = T_r^s \otimes (\bar{T}_{\bar{r}}^{\bar{s}} \otimes \hat{T}_{\hat{r}}^{\hat{s}})$
 - No conmutativa: $T_r^s \otimes \bar{T}_{\bar{r}}^{\bar{s}} \neq \bar{T}_{\bar{r}}^{\bar{s}} \otimes T_r^s$. Pero: $T_r^0 \otimes \bar{T}_0^{\bar{s}} = \bar{T}_0^{\bar{s}} \otimes T_r^0$.
- Si $(D_1, \dots, D_n)$ forman base del $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo $\mathfrak{X}(M)$ y $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ es su base dual, entonces: $\omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_r} \otimes D_{j_1} \otimes \dots \otimes D_{j_s}$ con $1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n$ forman base de $T_r^s(M)$.
(Nota: aunque en la variedad M no exista una base (global) de campos como la descrita, el resultado puede aplicarse a cualquier abierto $U \subset M$ y una base de campos en dicho abierto, como es el caso de la base estándar inducida por un sistema de coordenadas locales).

PRODUCTO EXTERIOR

Se define $\Omega_0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$.

Operador de Hemisimetrización. Sea $T_r \in T_r^0(M)$. Se define $(\mathbb{H}T_r) \in T_r^0(M)$ por:

$$(\mathbb{H}T_r)(D_1, \dots, D_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) T_r(D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(r)})$$

$\Omega_r(M) \subseteq T_r^0(M)$ submódulo de los tensores hemisimétricos (aquellos para los que $\mathbb{H}T_r = T_r$) covariantes.

Definición del producto exterior: $(\Omega_r, \bar{\Omega}_{\bar{r}}) \in \Omega_r(M) \times \Omega_{\bar{r}}(M) \mapsto \Omega_r \wedge \bar{\Omega}_{\bar{r}} \in \Omega_{r+\bar{r}}(M)$:

$$\Omega_r \wedge \bar{\Omega}_{\bar{r}} = \frac{(r+\bar{r})!}{r!\bar{r}!} \mathbb{H}(\Omega_r \otimes \bar{\Omega}_{\bar{r}})$$

En particular $\omega \wedge \bar{\omega} = \omega \otimes \bar{\omega} - \bar{\omega} \otimes \omega$ para cualesquiera $\omega, \bar{\omega} \in \Omega_1(M)$.

Se define $f \wedge \Omega_r = f \cdot \Omega_r$ para $f \in \Omega_0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$

Propiedades:

- $(\Omega(M), +, \wedge)$ es una $\mathcal{C}^\infty(M)$ -álgebra
 - Asociativa: $(\Omega_r \wedge \bar{\Omega}_{\bar{r}}) \wedge \hat{\Omega}_{\hat{r}} = \Omega_r \wedge (\bar{\Omega}_{\bar{r}} \wedge \hat{\Omega}_{\hat{r}})$
 - Anticonmutativa: $\Omega_r \wedge \bar{\Omega}_{\bar{r}} = (-1)^{r \cdot \bar{r}} \bar{\Omega}_{\bar{r}} \wedge \Omega_r$
- $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) \omega^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma(r)}$ para todo $\omega^1, \dots, \omega^r \in \Omega_1(M)$.
- Si $(D_1, \dots, D_n)$ forman base del $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo $\mathfrak{X}(M)$ y $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ es su base dual, entonces:
 - $\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_r}$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ forman base del $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo $\Omega_r(M)$.
 - $\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_r}(D_{j_1}, \dots, D_{j_r}) = \text{sgn} \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ j_1 & \dots & j_r \end{pmatrix}$, donde sgn indica el signo de la permutación si $j_1, \dots, j_r$ es una permutación de los índices $i_1, \dots, i_r$, o bien 0 si no son la misma colección de índices.
 - $\omega^{k_1} \wedge \dots \wedge \omega^{k_r}(X_1, \dots, X_r) = \det \left(a_i^{k_j} \right)_{i,j=1 \dots r}$ si los campos son $X_i = \sum_{k=1}^n a_i^k D_k$.

PRODUCTO INTERIOR

Definición $(D, T_r^s) \in \mathfrak{X}(M) \times T_r^s(M) \mapsto i_D T_r^s \in T_{r-1}^s(M)$ (con $r \geq 1$)

$$i_D T_r^s(D_1, \dots, D_{r-1}, \omega^1, \dots, \omega^s) = T_r^s(D, D_1, \dots, D_{r-1}, \omega^1, \dots, \omega^s)$$

Se define $i_D T_0^s = 0$ si $T_0^s \in T_0^s(M)$. (En particular $i_D f = 0$)

Propiedades:

- Es $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal en ambas componentes.
- $i_D(\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r \otimes D_1 \otimes \dots \otimes D_s) = \omega^1(D) \cdot \omega^2 \otimes \dots \otimes \omega^r \otimes D_1 \otimes \dots \otimes D_s$
- Lleva tensores hemisimétricos a tensores hemisimétricos: $i_D \Omega_r \in \Omega_{r-1}(M)$, $\forall \Omega_r \in \Omega_r(M)$
- i_D es una antiderivación en el álgebra exterior. Para todo $\Omega_r \in \Omega_r(M)$, $\bar{\Omega}_{\bar{r}} \in \bar{\Omega}_{\bar{r}}(M)$:

$$i_D(\Omega_r \wedge \bar{\Omega}_{\bar{r}}) = (i_D \Omega_r) \wedge \bar{\Omega}_{\bar{r}} + (-1)^r \Omega_r \wedge i_D \bar{\Omega}_{\bar{r}}$$

- Sobre los elementos de la base de $\Omega_r(M)$ antes mencionada:

$$\begin{aligned} i_D(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r) = & \omega^1(D) \cdot \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^r - \omega^2(D) \cdot \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \dots \wedge \omega^r + \dots + \\ & + (-1)^{\alpha-1} \omega^\alpha(D) \cdot \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{\alpha-1} \wedge \omega^{\alpha+1} \wedge \dots \wedge \omega^r + \dots + (-1)^{r-1} \omega^r(D) \cdot \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{r-1} \end{aligned}$$

CONTRACCIÓN DE ÍNDICES

Sea $T \in T_1^1(M)$. Llamamos endomorfismo asociado a T a:

$$\begin{aligned} f_T: \quad \Omega_1(M) & \rightarrow \Omega_1(M) = \text{Lin}(\mathfrak{X}(M), \mathcal{C}^\infty(M)) \\ \omega & \mapsto f_T(\omega): D \mapsto T(D, \omega) \end{aligned}$$

Es un endomorfismo del $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo $\Omega_1(M)$, que denotaremos por $T(\bullet, \bullet)$ y su traza nos proporciona un escalar sobre cada punto, luego una función sobre M , a la que denominaremos contracción $(1, 1)$ del tensor T :

$$C_1^1 T = \text{tr}(T(\bullet, \bullet))$$

Dado $T \in T_r^s(M)$ ($r \geq 1, s \geq 1$), llamamos contracción del índice k covariante con el índice l contravariante de T al tensor $C_k^l T \in T_{r-1}^{s-1}(M)$ definido por:

$$(C_k^l T)(D_1, \dots, D_{r-1}, \omega^1, \dots, \omega^{s-1}) = \text{tr} (T(D_1, \dots, D_{k-1}, \bullet, D_k, \dots, D_{r-1}, \omega^1, \dots, \omega^{l-1}, \bullet, \omega^l, \dots, \omega^{s-1}))$$

Propiedades:

- C_k^l es $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal: $C_k^l(T + f \cdot S) = C_k^l(T) + f \cdot C_k^l(S)$
- Sobre los elementos de una base:

$$C_k^l(\omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_r} \otimes D_{j_1} \otimes \dots \otimes D_{j_l}) = \omega^{i_k}(D_{j_l}) \cdot \omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_{k-1}} \otimes \omega^{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \omega^{i_r} \otimes D_{j_1} \otimes \dots \otimes D_{j_{l-1}} \otimes D_{j_{l+1}} \otimes \dots \otimes D_{j_l}$$

- $i_D T = C_1^1(D \otimes T)$

DERIVADA DE LIE

Sobre las funciones $(D, f) \mapsto L_D f = D(f) \in \mathcal{C}^\infty(M)$

Sobre campos vectoriales diferenciables: $(D, \bar{D}) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto L_D \bar{D} \in \mathfrak{X}(M)$ es el conmutador:

$$(L_D \bar{D})(f) = [D, \bar{D}](f) = D(\bar{D}(f)) - \bar{D}(D(f))$$

Sobre formas diferenciables $(D, \omega) \in \mathfrak{X}(M) \times \Omega_1(M) \mapsto L_D \omega \in \Omega_1(M)$:

$$D(\omega(\bar{D})) = (L_D \omega)(\bar{D}) + \omega(L_D \bar{D}) \quad , \text{ esto es, } (L_D \omega)(\bar{D}) = D(\omega(\bar{D})) - \omega([D, \bar{D}])$$

Sobre el álgebra tensorial se define análogamente: $(D, T_r^s) \in \mathfrak{X}(M) \times T_r^s(M) \mapsto L_D T_r^s \in T_r^s(M)$

$$D(T_r^s(D_1, \dots, \omega_s)) = (L_D T_r^s)(D_1, \dots, \omega_s) + T_r^s(L_D D_1, D_2, \dots, \omega_s) + \dots + T_r^s(D_1, \dots, L_D \omega_s)$$

Esto es, $(L_D T_r^s)(D_1, \dots, \omega_s) = D(T_r^s(D_1, \dots, \omega_s)) - T_r^s(L_D D_1, D_2, \dots, \omega_s) - \dots - T_r^s(D_1, \dots, L_D \omega_s)$

Propiedades:

- Sobre $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$:
 - $[D, \bar{D}] = -[\bar{D}, D]$
 - $[D, D] = 0$
 - $[D, \dots]$ es una derivación: $[D, D_1 + f \cdot D_2] = [D, D_1] + D(f) \cdot D_2 + f \cdot [D, D_2]$
 - Identidad de Jacobi:

$$[D_1, [D_2, D_3]] + [D_2, [D_3, D_1]] + [D_3, [D_1, D_2]] = 0$$

- Si $(x^1, \dots, x^n)$ es un sistema de coordenada locales, entonces $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$
- Es $\mathbb{R}$ -lineal en ambas componentes .
- Es una derivación para el producto tensorial:

$$L_D(T_r^s \otimes \bar{T}_{\bar{r}}^{\bar{s}}) = (L_D T_r^s) \otimes \bar{T}_{\bar{r}}^{\bar{s}} + T_r^s \otimes (L_D \bar{T}_{\bar{r}}^{\bar{s}})$$

En particular: $L_D(f \cdot T_r^s) = D(f) \cdot T_r^s + f \cdot L_D T_r^s$

- Transforma tensores hemisimétricos en tensores hemisimétricos: $L_D \Omega_r \in \Omega_r(M), \forall \Omega_r \in \Omega_r(M)$
- Es una derivación para el producto exterior:

$$L_D(\Omega_r \wedge \bar{\Omega}_{\bar{r}}) = (L_D \Omega_r) \wedge \bar{\Omega}_{\bar{r}} + \Omega_r \wedge (L_D \bar{\Omega}_{\bar{r}})$$

- Sobre los elementos $df \in \Omega_1(M)$ cumple: $L_D(df) = d(D(f))$
- En el álgebra tensorial $L_{[D, \bar{D}]} T_r^s = L_D(L_D T_r^s) - L_{\bar{D}}(L_D T_r^s)$. En particular, esta fórmula también es cierta para tensores hemisimétricos.
- En el álgebra exterior $i_{[D, \bar{D}]} \Omega_r = L_D i_{\bar{D}} \Omega_r - i_{\bar{D}} L_D \Omega_r \quad i_{[D, \bar{D}]} \Omega_r = i_D L_{\bar{D}} \Omega_r - L_{\bar{D}} i_D \Omega_r$

DIFERENCIAL EXTERIOR

Sobre funciones: $f \in \mathcal{C}^\infty(M) \mapsto df \in \Omega_1(M) = \mathfrak{X}(M)^*$, definido por $df(D) = D(f) \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Sobre 1-formas diferenciables: $\omega \in \Omega_1(M) \mapsto d\omega \in \Omega_2(M)$

$$(d\omega)(D, \bar{D}) = D(\omega(\bar{D})) - \bar{D}(\omega(D)) - \omega([D, \bar{D}])$$

Sobre r -formas diferenciables: $\Omega_r \in \Omega_r(M) \mapsto d\Omega_r \in \Omega_{r+1}(M)$

$$\begin{aligned} (d\Omega_r)(D_1, \dots, D_{r+1}) &= \sum_{\alpha=1}^{r+1} (-1)^{\alpha-1} D_\alpha \left(\Omega_r(D_1, \dots, \widehat{D}_\alpha, \dots, D_{r+1}) \right) + \\ &+ \sum_{\alpha, \beta=1}^{r+1} (-1)^{\alpha+\beta} \Omega_r([D_\alpha, D_\beta], D_1, \dots, \widehat{D}_\alpha, \dots, \widehat{D}_\beta, \dots, D_{r+1}) \end{aligned}$$

Propiedades:

- La diferencial exterior es $\mathbb{R}$ -lineal.
- d es una antiderivación en el álgebra exterior:

$$d(\Omega_r \wedge \bar{\Omega}_r) = (d\Omega_r) \wedge \bar{\Omega}_r + (-1)^r \Omega_r \wedge d\bar{\Omega}_r$$

en particular

$$d(f \cdot \Omega_r) = df \wedge \Omega_r + f \cdot d\Omega_r$$

- $d \circ d = 0$, esto es $d(d\Omega_r) = 0$
- $i_D d\Omega_r + di_D \Omega_r = L_D \Omega_r$
- La diferencial exterior conmuta con la derivada de Lie:

$$d(L_D \Omega_r) = L_D(d\Omega_r)$$

- Fórmula de Stokes: Si Σ es un dominio en M con frontera orientable diferenciable a trozos $\partial\Sigma$, entonces:

$$\int_{\Sigma} d\Omega_{n-1} = \int_{\partial\Sigma} i^* \Omega_{n-1}$$

donde i^* es el pull-back de formas diferenciales asociado a la inclusión natural $i: \partial\Sigma \hookrightarrow M$.

- Lema de Poincaré: Si $U \subset M$ es un abierto homeomorfo a una bola de $\mathbb{R}^n$, si $r \neq 0$ y si $\Omega_r \in \Omega_r(U)$ es cerrada ($d\Omega_r = 0$), entonces es exacta ($\Omega_r = d\Omega_{r-1}$ para algún $\Omega_{r-1} \in \Omega_{r-1}(U)$).

PULL-BACK DE TENSORES COVARIANTES

Aplicación diferenciable: $\varphi: M \rightarrow Y$ induce para cada $p \in M$ la aplicación lineal $\varphi_*: T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} Y$ definida por $(\varphi_* D_p)(g) = D_p(g \circ \varphi)$, para cualquier $g \in \mathcal{C}^\infty(Y)$.

(Nota: Puede definirse en cada punto, pero no puede definirse $\varphi_*: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(Y)$).

Pull-back de tensores covariantes: $T_r \in T_r^0(Y) \mapsto \varphi^* T_r \in T_r^0(M)$:

$$(\varphi^* T_r)_p(D_p^1, \dots, D_p^r) = (T_r)_{\varphi(p)}(\varphi_* D_p^1, \dots, \varphi_* D_p^r)$$

Propiedades:

- φ^* es $\mathbb{R}$ -lineal, $\varphi^*(\Omega_r(Y)) \subseteq \Omega_r(M)$
- $\text{Id}_M^* = \text{Id}_{T_r(M)}$, $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$
- $\varphi^*(T_r \otimes \bar{T}_r) = \varphi^* T_r \otimes \varphi^* \bar{T}_r$ $\varphi^*(\Omega_r \wedge \bar{\Omega}_r) = (\varphi^* \Omega_r) \wedge (\varphi^* \bar{\Omega}_r)$
- En particular: $\varphi^*(f \cdot T_r) = (f \circ \varphi) \cdot \varphi^* T_r$
- Conmuta con la diferencial exterior: $d(\varphi^* \Omega_r) = \varphi^*(d\Omega_r)$

ACCIÓN DE LOS AUTOMORFISMOS

Automorfismo $\varphi: M \rightarrow M$ (Diferenciable, con inversa diferenciable).

Acción sobre las funciones: $f \in \mathcal{C}^\infty(M) \mapsto \varphi \cdot f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ definida por

$$(\varphi \cdot f)(p) = f(\varphi^{-1}(p))$$

Acción sobre los campos vectoriales diferenciables: $D \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \varphi \cdot D \in \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$(\varphi \cdot D)(f) = \varphi \cdot (D(\varphi^{-1} \cdot f)) \in \mathcal{C}^\infty(M) \quad , \text{ esto es, } (\varphi \cdot D)_p = \varphi_*(D_{\varphi^{-1}(p)}) \in T_p M$$

Acción sobre las 1-formas diferenciables: $\omega \in \Omega_1(M) \mapsto \varphi \cdot \omega \in \Omega_1(M)$ definida por

$$(\varphi \cdot \omega)(D) = \varphi \cdot (\omega(\varphi^{-1} \cdot D)) \quad , \text{ esto es, } (\varphi \cdot \omega)_p = (\varphi^{-1})^* \omega_{\varphi^{-1}(p)} \in T_p^* M$$

Acción sobre los tensores: $T_r^s \in T_r^s(M) \mapsto \varphi \cdot T_r^s \in T_r^s(M)$ definida por:

$$(\varphi \cdot T_r^s)(D_1, \dots, D_r, \omega^1, \dots, \omega^s) = \varphi \cdot (T_r^s(\varphi^{-1} \cdot D_1, \dots, \varphi^{-1} \cdot D_r, \varphi^{-1} \cdot \omega^1, \dots, \varphi^{-1} \cdot \omega^s)) \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

$$\text{Esto es, } (\varphi \cdot T_r^s)_p(D_p^1, \dots, D_p^r, \omega_p^1, \dots, \omega_p^s) = (T_r^s)_{\varphi^{-1}(p)}(\varphi_*^{-1} D_p^1, \dots, \varphi_*^{-1} D_p^r, \varphi_*^* \omega_p^1, \dots, \varphi_*^* \omega_p^s)$$

Propiedades:

- $\varphi \cdot$ es $\mathbb{R}$ -lineal.
- $(\varphi \circ \psi) \cdot T_r^s = \varphi \cdot (\psi \cdot T_r^s) \quad \text{Id} \cdot T_r^s = T_r^s$
- $\varphi \cdot (T_r^s \otimes \bar{T}_r^s) = (\varphi \cdot T_r^s) \otimes (\varphi \cdot \bar{T}_r^s)$
- $\varphi \cdot (\Omega_r \wedge \bar{\Omega}_r) = (\varphi \cdot \Omega_r) \wedge (\varphi \cdot \bar{\Omega}_r)$
- $L_{\varphi \cdot D}(\varphi \cdot T_r^s) = \varphi \cdot (L_D T_r^s)$
- $i_{\varphi \cdot D}(\varphi \cdot T_r^s) = \varphi \cdot (i_D T_r^s)$
- $d(\varphi \cdot \Omega_r) = \varphi \cdot (d\Omega_r)$
- Si $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ es difeomorfismo, entonces: $\int_U \Omega_n = \int_{\varphi(U)} \varphi \cdot \Omega_n$

Grupo uniparamétrico $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \text{Aut}(M)$ asociado a un campo $D \in \mathfrak{X}(M)$ está definido por:

$$\varphi_0 = \text{Id}, \quad D(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f - \varphi_t \cdot f}{t} \quad , \text{ esto es, } \quad \varphi_0(p) = p, \quad D_p(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t}$$

Interpretación geométrica de la derivada de Lie:

Si $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es el grupo uniparamétrico de automorfismos asociado a $D \in \mathfrak{X}(M)$, entonces:

$$(L_D T_r^s)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(T_r^s)_p - (\varphi_t \cdot T_r^s)_p}{t}$$



Coordenadas locales en $U \subset M$: Homeomorfismo $x: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$

Sus componentes son funciones $x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$, a las que denominamos funciones coordenadas.

Diremos que un punto $p \in U \subset M$ tiene coordenadas $(a^1, \dots, a^n)$ si $x(p) = (a^1, \dots, a^n)$.

Notación: Toda función expresada mediante letras en tipo *itálico*, será una función sobre el abierto $U \subset M$. Toda función sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$ se escribirá con letra de tipo roman, en la forma $f(x^1, \dots, x^n)$, donde $x^1, \dots, x^n$ representan las funciones coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^n$.

Toda función f sobre U puede escribirse como $f \circ x$, siendo $f: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se denotará por f la función en U y por $f(x^1, \dots, x^n)$ la función correspondiente sobre $V \subset \mathbb{R}^n$. En particular, dado otro sistema de coordenadas $\bar{x}: U \rightarrow \bar{V} \subset \mathbb{R}^n$, sus componentes son funciones $\bar{x}^i$ sobre U , y estas se pueden expresar, usando la carta local $x: U \rightarrow V$ como acabamos de indicar, mediante funciones $\bar{x}^i(x^1, \dots, x^n): \bar{V} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de forma que $\bar{x}^i$ es composición $\bar{x}^i \circ x$

El sistema de coordenadas induce una noción de derivada direccional: Si f es una función sobre $U \subset M$ y $p \in U$ es un punto, podemos tomar $f(x^1, \dots, x^n)$, función sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$, y calcular la derivada parcial i -ésima de esta función en el punto $(a^1, \dots, a^n) = x(p)$. A este valor lo denotaremos por:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \left(\frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i} \right) (a^1, \dots, a^n)$$

De esta forma, $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ es una función sobre U (Siempre que las derivadas parciales existan).

Las derivaciones $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$ forman una base del espacio tangente en $p \in M$. Se suelen denotar estos vectores por $(e_1, \dots, e_n)$. Las diferenciales dx^i , definidas por $dx^i(D_p) = D_p(x^i)$ (donde D debe entenderse como una derivación), forman una base del espacio cotangente en $p \in M$. Se suele denotar estos covectores por $(e^1, \dots, e^n)$.

Todo campo vectorial en el abierto coordenado U puede describirse en la forma:

$$D = \sum_{j=1}^n D^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

siendo D^j funciones sobre U . Se llamará a estas “las componentes del campo D en el sistema de coordenadas (U, x) ”.

Todo campo de covectores en el abierto U puede expresarse en la forma:

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$$

donde ω_j son funciones sobre U . Se llamará a estas “las componentes del campo ω en el sistema de coordenadas (U, x) ”.

Todo campo de tensores de tipo (r, s) , $T \in T_r^s(M)$ puede expresarse en el abierto coordenado U como

$$T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}$$

Donde $T_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$ son funciones sobre $U \subset M$. Se llamará a estas “las componentes del campo T en el sistema de coordenadas (U, x) ”.

Siempre que dispongamos de dos sistemas de coordenadas $x: U \rightarrow V$ y $\bar{x}: U \rightarrow \bar{V}$ en el abierto U , podremos hablar de las funciones $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$ y de las funciones $\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}$ sobre $U \subset M$.

Fórmula de cambio de coordenadas para campos:

- Campos vectoriales

$$\left. \begin{aligned} D &= \sum_{j=1}^n D^j \frac{\partial}{\partial x^j} \\ D &= \sum_{j=1}^n \bar{D}^j \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{D}^j = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} D^l$$

■ Campos de covectores

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i \\ \omega &= \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i d\bar{x}^i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{\omega}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \omega_k$$

■ Campos de tensores

$$\left. \begin{aligned} T &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}}^n T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_s}} \\ T &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}}^n \bar{T}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} d\bar{x}^{i_1} \otimes \dots \otimes d\bar{x}^{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{j_s}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{T}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ l_1, \dots, l_s}}^n \frac{\partial x^{k_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{k_r}}{\partial \bar{x}^{i_r}} \frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{l_1}} \frac{\partial \bar{x}^{j_s}}{\partial x^{l_s}} T_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s}$$

Nota: Observemos en detalle la fórmula de cambio para campos vectoriales (la misma observación seguirá siendo válida para cualquier campo de tensores). La fórmula dada es válida cuando se piensa en todas las funciones como funciones sobre U . Sin embargo si estas funciones se expresasen en los abiertos correspondientes de $\mathbb{R}^n$, deberíamos decir que D^i suele representarse como funciones $D^i(x^1, \dots, x^n)$ sobre $V \subset \mathbb{R}^n$ mediante el sistema de coordenadas definido por $x: U \rightarrow V$, mientras que las funciones $\bar{D}^j$ suelen representarse como funciones $\bar{D}^j(x^1, \dots, x^n)$ sobre $\bar{V} \subset \mathbb{R}^n$ mediante el sistema de coordenadas definido por $\bar{x}: U \rightarrow \bar{V}$. Estas funciones $\bar{D}^i$ (que no son las funciones $\bar{D}^i$), sobre cualquier punto $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \in \bar{V}$, pueden computarse usando las funciones D^j y las fórmulas:

$$\bar{D}^j(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) = \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \bar{x}^j(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^l} \right)_{(x^1(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n), \dots, x^n(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n))} D^l(x^1(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n), \dots, x^n(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n))$$

donde $x^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ son las funciones que representan a las x^i en el sistema de coordenadas $\bar{x}: U \rightarrow \bar{V}$. Esta es la fórmula más habitual cuando se realiza cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$.

En lo sucesivo fijaremos una carta local (U, x) , respecto de la cual estan dadas las componentes de los distintos tensores con los que trabajemos.

Expresión en coordenadas del producto tensorial:

Si $T \in T_r^s(M)$ tiene componentes $(T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s})$ y $S \in T_{\bar{r}}^{\bar{s}}(M)$ tiene componentes $(S_{i_1 \dots i_{\bar{r}}}^{j_1 \dots j_{\bar{s}}})$, entonces $T \otimes S \in T_{r+\bar{r}}^{s+\bar{s}}(M)$ tiene componentes:

$$(T \otimes S)_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_{r+\bar{r}}}^{j_1 \dots j_s j_{s+1} \dots j_{s+\bar{s}}} = T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \cdot S_{i_{r+1} \dots i_{r+\bar{r}}}^{j_{s+1} \dots j_{s+\bar{s}}}$$

Si $T \in T_r^s(M)$ tiene componentes $(T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s})$ y $S \in T_r^s(M)$ tiene componentes $(S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s})$ entonces $T + S \in T_r^s(M)$ tiene componentes:

$$(T + S)_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} + S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$$

Si $T \in T_r^s(M)$ tiene componentes $(T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s})$ y f es una función en M , entonces $f \cdot T \in T_r^s(M)$ tiene componentes:

$$(f \cdot T)_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = f \cdot T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$$

Producto interior:

Si $D \in \mathfrak{X}(M)$ tiene componentes (D^i) y $T \in T_r^s$ (con $r \geq 1$) tiene componentes $(T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s})$, entonces $i_D T \in T_{r-1}^s(M)$ tiene componentes:

$$(i_D T)_{i_1 \dots i_{r-1}}^{j_1 \dots j_s} = \sum_{k=1}^n D^k T_{k i_1 \dots i_{r-1}}^{j_1 \dots j_s}$$

Contracción de índices:

Si $T \in \mathbb{T}_r^s(\mathbb{M})$ tiene componentes $(T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s})$ entonces $C_k^l T \in \mathbb{T}_{r-1}^{s-1}(\mathbb{M})$ tiene componentes:

$$(C_k^l T)_{i_1 \dots i_{r-1}}^{j_1 \dots j_{s-1}} = \sum_{\alpha=1}^n T_{i_1 \dots i_{k-1} \alpha i_k \dots i_{r-1}}^{j_1 \dots j_{l-1} \alpha j_l \dots j_{s-1}}$$

Derivada de Lie:

Sea $D \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ un campo vectorial con componentes (D^i) .

Si $\bar{D} \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ tiene componentes $(\bar{D}^i)$, entonces el paréntesis de Lie $L_D \bar{D} = [D, \bar{D}]$ tiene componentes:

$$(L_D \bar{D})^j = ([D, \bar{D}])^j = \sum_{k=1}^n \left(D^k \frac{\partial \bar{D}^j}{\partial x^k} - \bar{D}^k \frac{\partial D^j}{\partial x^k} \right)$$

Si $\omega \in \Omega_1(\mathbb{M})$ tiene componentes (ω_j) , entonces $L_D \omega \in \Omega_1(\mathbb{M})$ tiene componentes:

$$(L_D \omega)_i = \sum_{k=1}^n \left(D^k \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} + \omega_k \frac{\partial D^k}{\partial x^i} \right)$$

Si $T \in \mathbb{T}_r^s(\mathbb{M})$ tiene componentes $(T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s})$ entonces $L_D T \in \mathbb{T}_r^s(\mathbb{M})$ tiene componentes:

$$(L_D T)_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = \sum_{k=1}^n \left(D^k \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}}{\partial x^k} + \sum_{\alpha=1}^r T_{i_1 \dots i_{\alpha-1} k i_{\alpha+1} \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \frac{\partial D^k}{\partial x^{i_{\alpha}}} - \sum_{\alpha=1}^s T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{\alpha-1} k j_{\alpha+1} \dots j_s} \frac{\partial D^k}{\partial x^{j_{\alpha}}} \right)$$

Álgebra exterior:

Para simplificar la notación, siempre que dispongamos de una familia de funciones $(T_{i_1 \dots i_k})$, conocidas para cualquier elección de índices $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, denotaremos para una colección de enteros $(j_1, \dots, j_k)$ por $T_{[j_1 \dots j_k]}$ a la función:

$$T_{[j_1 \dots j_k]} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(k)}}$$

(Por ejemplo: $T_{[834]} = \frac{1}{6}(T_{834} + T_{348} + T_{483} - T_{843} - T_{384} - T_{438})$)

Operador de Hemisimetrización:

Si $T \in \mathbb{T}_r^0(\mathbb{M})$ tiene componentes $(T_{i_1 \dots i_r})$, entonces la hemisimetrización de T es un tensor $\mathbb{H}T \in \Omega_r(\mathbb{M})$ cuyas componentes son:

$$(\mathbb{H}T)_{i_1 \dots i_r} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}} = T_{[i_1 \dots i_r]}$$

Si $T \in \mathbb{T}_r^0(\mathbb{M})$ es un tensor hemisimétrico, entonces para cualquier colección de índices $i_1, \dots, i_r$ y cualquier permutación $\sigma \in S_r$ se cumple $T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}} = \text{sgn}(\sigma) T_{i_1 \dots i_r}$. En consecuencia $T_{i_1 \dots i_r} = T_{[i_1 \dots i_r]}$. De hecho, cualquiera de estas dos afirmaciones caracteriza los tensores hemisimétricos.

Producto exterior:

Con esta notación, si $\Omega \in \Omega_r(\mathbb{M})$ es un tensor hemisimétrico r -covariante cuyas componentes son $(\Omega_{i_1 \dots i_r})$ y $\bar{\Omega} \in \Omega_{\bar{r}}(\mathbb{M})$ es un tensor hemisimétrico $\bar{r}$ -covariante cuyas componentes son $(\bar{\Omega}_{j_1 \dots j_{\bar{r}}})$, entonces el tensor $\Omega \wedge \bar{\Omega}$ tiene por componentes:

$$(\Omega \wedge \bar{\Omega})_{k_1 \dots k_r k_{r+1} \dots k_{r+\bar{r}}} = \frac{1}{r! \bar{r}!} \sum_{\sigma \in S_{r+\bar{r}}} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{k_{\sigma(1)} \dots k_{\sigma(r)}} \bar{\Omega}_{k_{\sigma(r+1)} \dots k_{\sigma(r+\bar{r})}} := \Omega_{[k_1 \dots k_r]} \bar{\Omega}_{[k_{r+1} \dots k_{r+\bar{r}}]}$$

Donde en lo sucesivo, también para simplificar, siempre que dispongamos de una colección de funciones $(T_{i_1 \dots i_{k+l}})$, indicamos por

$$T_{[j_1 \dots j_k][j_{k+1} \dots j_{k+l}]} = \frac{1}{k! l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) T_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(k+l)}}$$

Así por ejemplo, si tenemos $\omega \in \Omega_1(M)$ y $\bar{\omega} \in \Omega_2(M)$, entonces $\bar{\omega}_{ij} = -\bar{\omega}_{ji}$ y:

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \bar{\omega})_{834} &= \omega_{[8]}\bar{\omega}_{[34]} = \frac{1}{2} (\omega_8\bar{\omega}_{34} + \omega_3\bar{\omega}_{48} + \omega_4\bar{\omega}_{83} - \omega_8\bar{\omega}_{43} - \omega_3\bar{\omega}_{84} - \omega_4\bar{\omega}_{38}) = \\ &= \omega_8\bar{\omega}_{34} + \omega_3\bar{\omega}_{48} + \omega_4\bar{\omega}_{83} \end{aligned}$$

Diferencial exterior:

Si $\Omega \in \Omega_r(M)$ es un tensor hemisimétrico r -covariante con componentes $\Omega_{i_1, \dots, i_r}$, entonces $d\Omega$ es un tensor hemisimétrico $(r+1)$ -covariante con componentes:

$$(d\Omega)_{i_1 \dots i_{r+1}} = \sum_{\alpha=1}^{r+1} (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial \Omega_{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_r}}{\partial x^{i_\alpha}} = \frac{1}{1!r!} \sum_{\sigma \in S_{r+1}} \text{sgn}(\sigma) \frac{\partial \Omega_{i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(r+1)}}}{\partial x^{i_{\sigma(1)}}} = \frac{\partial \Omega_{[i_2 \dots i_{r+1}]}}{\partial x^{[i_1]}}$$

Integración:

Integración de una n -forma diferencial en un dominio Σ contenido en una carta local (U, x) .

Sólo consideraremos cartas (U, x) positivamente orientadas (Con esto queremos decir que los vectores tangentes $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ tiene orientación positiva según el convenio elegido de orientación).

Si $\Omega \in \Omega_n(M)$ es una n -forma, entonces $\Omega = f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ y sus componentes son todas de la forma $\Omega_{i_1 \dots i_n} = f \cdot \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$. Consideremos la función $f(x^1, \dots, x^n): V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ asociada a f (esto es, $f = f \circ x$). Si $\Sigma \subset U$ es un dominio contenido en el abierto coordenado (U, x) , y $S = x^{-1}(\Sigma) \subset V \subset \mathbb{R}^n$ es el dominio correspondiente en $\mathbb{R}^n$, entonces:

$$\int_{\Sigma} \Omega = \int_S f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n$$

Con esta expresión y la dada para la diferencial exterior, la fórmula de Stokes en variedades de dimensión 2 y 3 es simplemente las clásicas fórmulas de Stokes y Greene para funciones de variable real.

Morfismos inducidos en el álgebra tensorial:

Sea $\varphi: M \rightarrow Y$ una aplicación diferenciable entre dos variedades de dimensión n y m , respectivamente. Sean (U, x) y (U', y) entornos coordenados en M e Y para los cuales $\varphi(U) \subset U'$. En este caso las funciones $\varphi^i = y^i \circ \varphi$ son funciones sobre $U \subset M$, que nos dan las “ecuaciones” de la aplicación φ :

$$y^i(\varphi(p)) = \varphi^i(p)$$

La aplicación inducida en los espacios tangentes es $\varphi_*: T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} Y$

$$\varphi_* \left(\sum_{k=1}^n \lambda^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p \right) = \sum_{k,j=1}^n \lambda^k \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^k}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{\varphi(p)}$$

Pull-back de tensores covariantes: $T_r \in T_r^0(Y) \mapsto \varphi^* T_r \in T_r^0(M)$.

$$\varphi^* \left(\sum_{i_1, \dots, i_r} T_{i_1, \dots, i_r} dy^{i_1} \otimes \dots \otimes dy^{i_r} \right) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_r}} (T_{i_1, \dots, i_r} \circ \varphi) \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial \varphi^{i_r}}{\partial x^{j_r}} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r}$$

Acción de los automorfismos:

Sea $\varphi: M \rightarrow M$ un automorfismo de M que, en el abierto coordenado (U, x) , puede representarse mediante las ecuaciones $x^i(\varphi(p)) = \varphi^i(p)$ para ciertas funciones φ^i .

(Vamos a considerar, por tanto, que estamos trabajando sólo en el abierto dado por los puntos $p \in U$ tales que $\varphi(p)$ siga estando en U . El abierto $U \cap \varphi^{-1}(U)$).

Denotaremos por A_j^i la matriz de funciones $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}$, y por B_j^i la matriz inversa (Esto es, las funciones B_j^i satisfacen en cualquier punto las igualdades: $\sum_{k=1}^n B_k^i(q) A_j^k(q) = \delta_j^i$)

$$A_j^i(p) = \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \right)_p \quad B_j^i(p) = \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial x^j} \right)_{\varphi(p)} \quad \text{donde } \psi \circ \varphi = \text{Id y } \psi^i(p) = x^i(\psi(p))$$

Si $T \in T_r^s(M)$ es un campo de tensores con componentes $(T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s})$ entonces $\varphi \cdot T$ es un campo de tensores cuyas componentes están dadas por:

$$\begin{aligned} (\varphi \cdot T)_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} &= \left(\sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ l_1, \dots, l_s}}^n T_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s} A_{l_1}^{j_1} \dots A_{l_s}^{j_s} B_{i_1}^{k_1} \dots B_{i_r}^{k_r} \right) \circ \varphi^{-1} = \\ &= \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ l_1, \dots, l_s}}^n (T_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s} \circ \varphi^{-1}) \cdot \left(\frac{\partial \varphi^{j_1}}{\partial x^{l_1}} \circ \varphi^{-1} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{\partial \varphi^{j_s}}{\partial x^{l_s}} \circ \varphi^{-1} \right) \cdot \frac{\partial \psi^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \psi^{k_r}}{\partial x^{i_r}} \end{aligned}$$

Compárese esta fórmula con el remark que se hizo al hablar de cambio de coordenadas para campos vectoriales.



