El método Símplex

Considérese el problema de programación lineal dado en forma estándar cuyo conjunto de soluciones factibles es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y consistente en minimizar (o maximizar) la función objetivo:

$$z = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En lo sucesivo llamaremos A a la matriz de restricciones, que supondremos de rango máximo $m \leq n$, sus columnas las denotaremos por $\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ y llamaremos $\mathbf{b}$ a la matriz $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Dicho espacio de soluciones factibles forma una subvariedad afín de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - m$.

Tengamos una solución factible básica $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots x_n)$ donde $x_1, \dots, x_m$ sean variables básicas (y por tanto, $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$).

En esta situación, tomando la matriz B formada por las columnas $\mathbf{a}_1$ hasta $\mathbf{a}_m$, de forma que $A = (B|\, N)$, las restricciones se pueden expresar en la forma:

$$B^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Y al ser $B^{-1} \cdot A = \left(Id|\, B^{-1}N\right)$ la solución factible básica vendrá dada por $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \mathbf{b}$, $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$. Por tanto, $x_1, \dots, x_m$ pueden expresarse en nuestra subvariedad como funciones de $x_{m+1}, \dots x_n$, que formarán una base del espacio de las funciones lineales sobre ella.

El valor óptimo se alcanza en los vértices del recinto considerado, esto es, en alguna de las soluciones factibles básicas.

El **algoritmo símplex** describe un procedimiento mediante el cual pasar de una solución factible básica $(x_1, \dots, x_n)$ a otra donde la función objetivo tome un valor más favorable, si es que ello es posible. El proceso a seguir es, geométricamente, el siguiente:

Si se deja libre el valor de algún x_k de los $x_{m+1}, \dots, x_n$ manteniendo nulos el resto, tendremos la ecuación de una recta en nuestro espacio de soluciones factibles, cuyas ecuaciones serán:

$$x_{m+1} = 0, \dots, x_k = t, \dots, x_n = 0$$

$$\left(Id|\, B^{-1} \cdot N\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Just to be used for teaching, study and research purposes. For other uses (commercial or personal), contact the author at crodrigo@us.es

que pueden escribirse en la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x_{m+1}=0,\ldots,x_k=t,\ldots,x_n=0 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + t\cdot B^{-1}\cdot \mathbf{a}_k = B^{-1}\cdot \mathbf{b} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_{m+1}=0,\ldots,x_k=t,\ldots,x_n=0 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = B^{-1}\cdot \mathbf{b} - t\cdot B^{-1}\cdot \mathbf{a}_k \end{array}$$

Por lo tanto, aumentar x_k en t unidades supone disminuir $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ en $t\cdot B^{-1}\cdot \mathbf{a}_k$ unidades.

Teniendo esto en cuenta, la función objetivo $c_1\cdot x_1+\ldots+c_n\cdot x_n$ (cuando x_k aumenta t unidades) incrementará su valor en $t\cdot\big(c_k-(c_1\ldots c_m)\cdot B^{-1}\cdot \mathbf{a}_k\big)$.

Si el problema consiste en encontrar un mínimo, interesa variar x_k sólo si ese valor es negativo, esto es: $z_k-c_k\geq 0$ (donde $z_k=(c_1\ldots c_m)\cdot B^{-1}\cdot \mathbf{a}_k$). Si lo que se busca, por el contrario, es un máximo, variaremos x_k sólo si $z_k-c_k\leq 0$. En todo caso, tras el cambio realizado de $x_k=0$ a otro valor de x_k, la función objetivo se habrá incrementado en $(c_k-z_k)\cdot x_k$. Si $z_k-c_k=0$, entonces la función objetivo se mantiene constante sobre todos los puntos de la recta considerada.

Variando, pues, x_k todo lo que queramos, podríamos aumentar o disminuir la función objetivo arbitrariamente. Sin embargo, x_k no varía libremente, sino que está sujeto a las restricciones $x_i\geq 0\,\forall i$. Por tanto, puede aumentarse x_k sólo hasta el punto en que algún x_i pase a ser nulo. Aumentarlo más supondría salirse del conjunto de soluciones factibles.

Recordemos, pues, las ecuaciones de nuestra recta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = B^{-1}\cdot \mathbf{b} - t\cdot B^{-1}\cdot \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} cte_1 \\ \vdots \\ cte_m \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{pmatrix}$$

Aquellas variables x_i para las que $y_{ik}\leq 0$ no se harán nunca negativas por mucho que aumentemos $x_k=t$, pero aquellas para las que $y_{ik}>0$ pasan a ser nulas y después negativas en cuanto t alcanza $\frac{cte_i}{y_{ik}}$. Así pues, podemos alcanzar a lo más el valor:

$$t=\min\left\{\frac{cte_i}{y_{ik}}:\, y_{ik}>0\right\}$$

Dado que t puede venir limitado por un cierto valor $\frac{cte_i}{y_{ik}}$ por la ecuación $x_i\geq 0$, a la variable x_i que provoca esta acotación se le llama **variable de bloqueo**. Dicha variable se anula al tomar el punto $x_k=\frac{cte_i}{y_{ik}}$ de la recta considerada, saliendo por ello x_i del conjunto de variables básicas y entrando en su lugar x_k, para dar otro vértice. Al elemento y_{ik} que se utiliza se le llama **pivote**.

Ejemplo

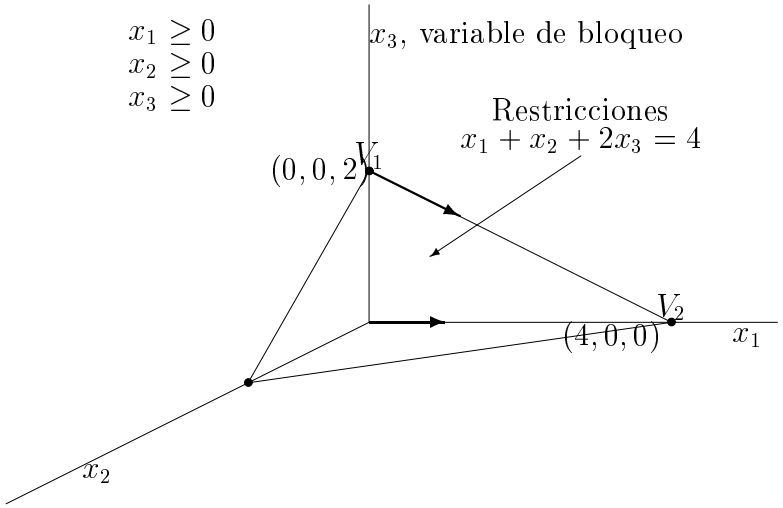
Sirva como ilustración la figura 1 en la que se tiene un recinto en el octante positivo de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $x_1+x_2+2x_3=4$. Partiendo de $V_1=(0,0,2)$, solución donde la variable básica es x_3, podemos incrementar x_1 ,moviéndonos a lo largo de una recta, pero sólo hasta el punto V_2, donde $x_1=4$ y x_3 se anula, bloqueando cualquier avance en esta dirección.

Conclusiones

1. **Si $z_k-c_k\leq 0\,\forall k=m+1,\ldots,n$, entonces no se puede hacer menor la función objetivo** moviéndose a ningún vértice adyacente. En esta situación, los k para los que $z_k-c_k=0$ definen las caras, aristas, etc. sobre los que la función objetivo mantiene su valor.
2. **Si $z_k-c_k>0$ para algún k, entonces sí debería poder hacerse menor la función objetivo** en uno de sus vértices adyacentes. Considérese el vector $B^{-1}\mathbf{a}_k=\begin{pmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{pmatrix}$.

Just to be used for teaching, study and research purposes. For other uses (commercial or personal), contact the author at crodrigo@us.es

Figura 1: Método símplex en 3 dimensiones



a) Si todas sus **componentes** son **negativas o nulas**, entonces no hay variable de bloqueo y en la dirección en la que x_k aumenta, **la función objetivo no está acotada** y se hace tan pequeña como se desee con sólo movernos a lo largo de la arista definida por x_k.

b) Si **alguna componente es positiva**, aparece una **variable de bloqueo**. El crecimiento de x_k debe interrumpirse en el valor $t = \min\left\{\frac{cte_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right\}$. La mejora de la función objetivo es $(z_k - c_k) \cdot x_k$.

c) Si ese $\frac{cte_i}{y_{ik}}$ es cero (luego $cte_i = 0$, **solución factible básica degenerada**), entonces el avance que se puede realizar en la dirección x_k es de 0 unidades, y por tanto, el vértice asociado a las **nuevas variables básicas** es en realidad el mismo punto, no disminuyendo la función objetivo.

Obsérvese que uno puede seguir moviéndose entre las soluciones factibles básicas degeneradas, saliendo de esta situación si se disminuye la función objetivo en algún paso, o bien corriendo el riesgo de entrar en un ciclo en el que, intentando disminuir la función objetivo, simplemente se vuelva una y otra vez al mismo vértice (**problema de ciclado**). Para evitarlo un remedio simple consiste en descartar en cada paso todas aquellas colecciones de variables básicas que hayan sido ya estudiadas (y,por tanto, que provocarían la entrada en un ciclo si se volviesen a usar).

Sólo una vez que se tenga la seguridad de que para ninguna colección de variables básicas que representan al vértice problemático existe un vértice adyacente en el que la función objetivo se haga menor, se podrá asegurar que la solución degenerada que se tiene es la solución óptima buscada.

Implementación del método símplex en formato de tablas

El procedimiento antes descrito permite establecer de forma algorítmica un procedimiento para resolver problemas estándar de programación lineal. Llamaremos tabla símplex asociada al problema símplex antes descrito y al vértice dado por las variables básicas $x_{a_1}, \ldots x_{a_m}$ a la siguiente tabla:

	x_{a_1}		x_{a_i}		x_{a_m}		x_j		x_k		Valor
z	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	$z_j - c_j$	$\ldots$	$z_k - c_k$	$\ldots$	$\sum c_{a_i} cte_i$
x_{a_1}	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	y_{1j}	$\ldots$	y_{1k}	$\ldots$	cte_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{a_i}	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	$\ldots$	y_{ij}	$\ldots$	$\boxed{y_{ik}}$	$\ldots$	cte_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{a_m}	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$\ldots$	y_{mj}	$\ldots$	y_{mk}	$\ldots$	cte_m

Just to be used for teaching, study and research purposes. For other uses (commercial or personal), contact the author at crodrigo@us.es

En esta tabla está representada la información básica del problema de programación lineal considerado:

1. La columna de la izquierda indica qué variables se toman como básicas. Dichas variables determinan un vértice del conjunto de soluciones factibles.
2. La columna de la derecha contiene las coordenadas del vértice asociado a dichas variables básicas: $x_{a_i} = cte_i$, $i = 1 \dots m$; $x_j = 0$ para el resto.
3. En la fila superior vienen indicados los coeficientes $z_j - c_j$ que representan el coeficiente de mejora de la función objetivo z al moverse en la dirección x_j, esto es, lo que disminuye z al aumentar x_j una unidad mientras se mantienen el resto de las variables no básicas nulas.
4. En la casilla superior derecha viene indicado el valor de la función objetivo z en el vértice considerado.
5. El espacio de soluciones factibles es

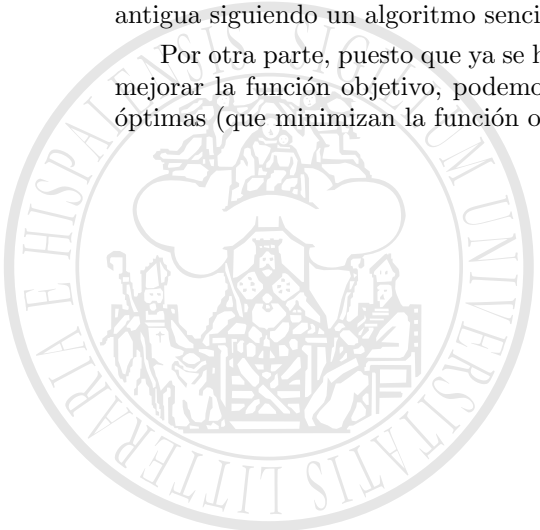
$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & y_{1j} & \dots & y_{1k} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & y_{ij} & \dots & y_{ik} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & y_{mj} & \dots & y_{mk} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{a_1} \\ \vdots \\ x_{a_i} \\ \vdots \\ x_{a_m} \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cte_1 \\ \vdots \\ cte_i \\ \vdots \\ cte_m \end{pmatrix}$$

Si deseamos escribir la tabla símplex asociada al vértice dado por el conjunto de variables básicas consistente en sustituir x_{a_i} por x_k (vértice adyacente al anterior), tras realizar los cálculos oportunos, su expresión resulta ser:

	x_{a_1}		x_{a_i}		x_{a_m}		x_j		x_k		Valor
z	0	$\dots$	$-\frac{z_k - c_k}{y_{ik}}$	$\dots$	0	$\dots$	$(z_j - c_j) + -\frac{y_{ij}(z_k - c_k)}{y_{ik}}$	$\dots$	0	$\dots$	$\sum c_{a_i} cte_i + -\frac{cte_i(z_k - c_k)}{y_{ik}}$
x_{a_1}	1	$\dots$	$-\frac{y_{1k}}{y_{ik}}$	$\dots$	0	$\dots$	$y_{1j} - \frac{y_{ij}y_{1k}}{y_{ik}}$	$\dots$	0	$\dots$	$cte_1 - \frac{y_{1k}cte_i}{y_{ik}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_k	0	$\dots$	$\frac{1}{y_{ik}}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{y_{ij}}{y_{ik}}$	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{cte_i}{y_{ik}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{a_m}	0	$\dots$	$-\frac{y_{mk}}{y_{ik}}$	$\dots$	1	$\dots$	$y_{mj} - \frac{y_{ij}y_{mk}}{y_{ik}}$	$\dots$	0	$\dots$	$cte_m - \frac{y_{mk}cte_i}{y_{ik}}$

Esta expresión de la tabla símplex asociada al nuevo vértice puede ser calculada a partir de la tabla antigua siguiendo un algoritmo sencillo (**pivoteo**) que indicamos en la página siguiente.

Por otra parte, puesto que ya se ha indicado cómo decidir si pasar de un vértice a otro adyacente para mejorar la función objetivo, podemos establecer el algoritmo símplex que permite hallar las soluciones óptimas (que minimizan la función objetivo) del problema.



Just to be used for teaching, study
and research purposes. For other uses
(commercial or personal),
contact the author at crodrigo@us.es

PIVOTEO

Determinadas las variables x_{a_i} que deja de ser básica y la x_k que entra en el conjunto de variables básicas, el paso de una tabla símplex a la otra puede resumir en la forma:

1. Localizar el elemento y_{ik} (**pivote**), así como todos los valores y_{lk},$z_k - c_k$ que aparecen en su columna.
2. Dividir la fila i-ésima entre el pivote y_{ik}.
3. Sustituir cada una de las restantes filas l-ésimas por ella misma menos y_{lk} veces la nueva fila i-ésima. Realizar la operación también para la fila superior utilizando $(z_k - c_k)$.
4. Sustituir x_{a_i} por x_k en la columna de variables básicas.
5. Intercambiar la posición de la columna k-ésima con la a_i-ésima.

ALGORITMO SÍMPLEX

(minimización)

1. Determinar una solución factible básica y escribir su tabla símplex asociada.
2. Si todos los $z_k - c_k$ son negativos, este vértice representa una solución óptima. Todos los vértices adyacentes toman valores mayores de la función objetivo.

   Si algún $z_k - c_k$ es positivo, moviéndonos en esa dirección mejoraremos la función objetivo. Elegiremos la dirección para la que $z_k - c_k$ sea el mayor posible. (x_k se denomina **variable de salida**).
3. Se decide si hay variable de bloqueo. En la columna k-ésima están los valores y_{ik} que, si son negativos o nulos, indican la ausencia de bloqueo. En este caso la función objetivo no está acotada inferiormente.

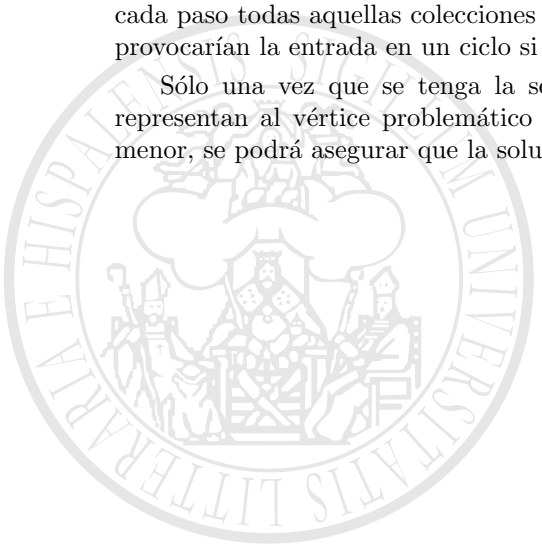
   Si hay algún y_{ik} positivo, la variable de bloqueo será aquella para la que $\frac{cte_i}{y_{ik}}$ sea mínimo. (x_i se llama **variable de entrada**).
4. Se realiza la operación de pivote en la tabla con y_{ik}, obteniéndose la tabla símplex asociada al nuevo vértice, donde la función objetivo toma un valor menor.
5. Se repiten en esta tabla los pasos a partir del número 2 hasta encontrar un valor óptimo o la no acotación de la función objetivo.

El algoritmo para maximización es idéntico, salvo la elección de la variable de salida que se realizará según el criterio $z_k - c_k < 0$.

Ciclado: Si en el paso 4 se vuelve a alguna colección de variables básicas ya estudiada, se deben elegir otras variables básicas que representen el mismo vértice para evitar entrar en un ciclo.

Obsérvese que uno puede seguir moviéndose entre las soluciones factibles básicas degeneradas, saliendo de esta situación si se disminuye la función objetivo en algún paso, o bien corriendo el riesgo de entrar en un ciclo en el que, intentando disminuir la función objetivo, simplemente se vuelva una y otra vez al mismo vértice (**problema de ciclado**). Para evitarlo un remedio simple consiste en descartar en cada paso todas aquellas colecciones de variables básicas que hayan sido ya estudiadas (y,por tanto, que provocarían la entrada en un ciclo si se volviesen a usar).

Sólo una vez que se tenga la seguridad de que para ninguna colección de variables básicas que representan al vértice problemático existe un vértice adyacente en el que la función objetivo se haga menor, se podrá asegurar que la solución degenerada que se tiene es la solución óptima buscada.



Just to be used for teaching, study
and research purposes. For other uses
(commercial or personal),
contact the author at crodrigo@us.es